



**Universidad Nacional Mayor de San Marcos**

**Universidad del Perú. Decana de América**

Dirección General de Estudios de Posgrado

Facultad de Ciencias Matemáticas

Unidad de Posgrado

**Ecuaciones diferenciales parciales en problemas de  
difusión espacial en dinámica de poblaciones en  
ambiente aleatorio**

**TESIS**

Para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura

**AUTOR**

Sofía Irena DURAN QUIÑONES

**ASESOR**

Dra. María Natividad ZEGARRA GARAY

Lima, Perú

2019



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

## Referencia bibliográfica

---

Duran, S. (2019). *Ecuaciones diferenciales parciales en problemas de difusión espacial en dinámica de poblaciones en ambiente aleatorio*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Facultad de Ciencias Matemáticas, Unidad de Posgrado]. Repositorio institucional Cybertesis UNMSM.

---

## Información complementaria

Código ORCID del asesor (es)	<b><a href="https://orcid.org/0000-0002-34189185">https://orcid.org/0000-0002-34189185</a></b>
Autor DNI (Obligatorio)	<b>08280282</b>
Pasaporte /carnet de extranjería (sólo extranjeros)	
Asesor DNI (Obligatorio)	<b>09206994</b>
Código ORCID del autor	<a href="https://orcid.org/0000-0003-0401-025X">https://orcid.org/0000-0003-0401-025X</a>
Grupo de investigación	GRUPO VILLARREAL
Financiamiento	-----
Ubicación geográfica donde se desarrolló la Investigación (incluirse localidades y/o coordenadas geográficas).	Perú, Ciudad Universitaria - UNMSM, Av. República de Venezuela 3400, Cercado de Lima. 12°03'36.2"S 77°04'55.3"W Perú, Lima-San Miguel.
Disciplinas OCDE	Matemáticas puras <a href="http://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01">http://purl.org/pe-repo/ocde/ford#1.01.01</a>
Año o rango de años que la investigación abarcó.	2014-2019

## ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS DE GRADO ACADÉMICO DE MAGÍSTER

Siendo las, 11:15 horas del día sábado 16 de marzo del dos mil diecinueve, en el Auditorio de la Facultad de Ciencias Matemáticas, el Jurado Evaluador de Tesis, Presidido por el Dr. Alfonso Pérez Salvatierra e integrado por los siguientes miembros, Dr. Ricardo Enrique Castro Santis (Jurado Evaluador), Mg. Edinson Raúl Montoro Alegre (Jurado Evaluador), Mg. Jhelly Reynaluz Pérez Núñez (Jurado Informante) y la Dra. María Natividad Zegarra Garay como Miembro Asesor, se reunieron para la sustentación de la tesis titulada: «ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES EN PROBLEMAS DE DIFUSIÓN ESPACIAL, EN DINÁMICA DE POBLACIONES EN AMBIENTE ALEATORIO» presentada por la Bachiller Sofía Irena Duran Quiñones para optar el Grado Académico de Magíster en Matemática Pura.


Luego de la exposición de la graduanda, los Miembros del Jurado hicieron las preguntas correspondientes, así como las observaciones e inquietudes acerca del trabajo de tesis, a las cuales la Bachiller Sofía Irena Duran Quiñones respondió con acierto y solvencia, demostrando pleno conocimiento del tema.

A continuación se realizó la calificación correspondiente, según tabla adjunta, resultando la Bachiller Sofía Irena Duran Quiñones aprobada con el calificativo de .....13....  
...Muy bueno

Habiendo sido aprobada la sustentación de la Tesis, el Jurado Evaluador recomienda para que el Consejo de Facultad apruebe el otorgamiento del Grado Académico de **Magíster en Matemática Pura a la Bachiller Sofía Irena Duran Quiñones.**

Siendo las 12:15. horas, se levantó la sesión, firmando para constancia la presente Acta.

  
Dr. Ricardo Enrique Castro Santis  
**Miembro**

  
Mg. Jhelly Reynaluz Pérez Núñez  
**Miembro**

  
Dr. Alfonso Pérez Salvatierra  
**Presidente**

  
Mg. Edinson Raúl Montoro Alegre  
**Miembro**

  
Dra. María Natividad Zegarra Garay  
**Miembro Asesor**

---

# ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES EN PROBLEMAS DE DIFUSIÓN ESPACIAL EN DINÁMICA DE POBLACIONES EN AMBIENTE ALEATORIO

**Autor:** SOFÍA IRENA DURAN QUIÑONES

Tesis presentada a consideración del jurado examinador nombrado por la Unidad de Posgrado de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos como parte de los requisitos para obtener el grado académico de **Magister en Matemática Pura**.

Aprobada por :

---

Dr. Alfonso Pérez Salvatierra  
**Presidente**

---

Mg. Jhelly Reynaluz Pérez Núñez  
**Miembro**

---

Dr. Ricardo Enrique Castro Santis  
**Miembro**

---

Mg. Edinson Raúl Montoro Alegre  
**Miembro**

---

Dra. María N. Zegarra Garay  
**Miembro Asesor**

---

## FICHA CATALOGRÁFICA

Duran Quiñones, Sofía Irena

Ecuaciones Diferenciales Parciales en Problemas de Difusión Espacial en Dinámica de Poblaciones en Ambiente Aleatorio. (Lima) 2019.

VII., 106 p., 30 cm (UNMSM, Maestría, Matemática, 2019) Tesis, Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Facultad de Ciencias Matemáticas.

1. Matemática Pura I. UNMSM/FCM II. Título (Serie).

---

## DEDICATORIA

A mis adoradas hijas: Valeria y Natalia



---

## AGRADECIMIENTOS

- Ante todo gracias a Dios que me permite día a día disfrutar de esta hermosa vida al lado de las personas que más amo: Mi familia.
- Mi más profundo agradecimiento a mi asesora de tesis la Dra. María Zegarra Garay por su paciencia y guía durante el desarrollo del trabajo, por su amistad y apoyo moral que me permitieron seguir adelante y culminar con éxito este proyecto
- Un especial agradecimiento al Dr. Ricardo Castro por su tiempo dedicado en aclarar algunas dudas y sugerencias acertadas, durante su estancia de investigación en la Facultad, para la mejora de la tesis.
- A las autoridades, docentes y administrativos de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la UNMSM por el apoyo brindado en el período en que se desarrolló el trabajo.

---

## RESUMEN

### Ecuaciones Diferenciales Parciales en Problemas de Difusión Espacial en Dinámica de Poblaciones en Ambiente Aleatorio

Duran Quiñones, Sofía Irena

Marzo, 2019

**Asesor** : Dra. María Natividad Zegarra Garay.

**Título Obtenido** : Magister en Matemáticas.

---

En la presente tesis se estudia la dinámica de poblaciones de un sistema con difusión espacial y estocasticidad ambiental. A diferencia de los modelos tradicionales de dinámica de poblaciones abordada por las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, se considera en este trabajo la difusión de las poblaciones en el territorio y la variación estocástica del medio ambiente envasado en un modelo de evolución en Ecuaciones Diferenciales Parciales y Ecuaciones Diferenciales Estocásticas.

La difusión espacial es aplicada a individuos de la población considerando una analogía con la dinámica de gases, es decir, considerando a los individuos de la población análogos a moléculas de gas, lo que implica que la densidad poblacional seguirá la ley de Fick con una ecuación de difusión del tipo,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \nabla \cdot \nabla u + f(u)$$

La variación estocástica del ambiente es modelada usando la teoría de las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas, lo que implica perturbaciones aleatorias de tipo Movimiento Browniano sobre las condiciones ambientales, esto conlleva a que la dinámica de población se modelará usando una ecuación de evolución del tipo,

$$X(t) = x_0 + \int_0^t \alpha(t, X(t))dt + \int_0^t \sigma(t, X(t))dB(t)$$

Si se une en un modelo con difusión espacial y con estocasticidad ambiental, para la dinámica poblacional se tendrá una Ecuación Diferencial Parcial Estocástica de la forma,

$$\frac{\partial X}{\partial t} = D \nabla \cdot \nabla X + f(X) + \sigma(X(t)) dB(t)$$

En esta tesis se estudia la existencia y unicidad para un modelo estocástico de competición para  $n$  especies con difusión espacial, el cual puede ser escrito en forma resumida como el siguiente sistema,

$$dN_i(t, x) = \left( a_i - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} N_j(t, x) N_i(t, x) + \epsilon_i \Delta N(t, x) \right) dt + \rho_i N_i(t, x) dW_t$$

donde  $W_t = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i W^{(i)}(t)$  con condiciones de Neumann sobre la frontera del tipo  $\nabla N_i(t, x) \cdot \vec{x} = 0$  para  $x$  en la frontera del dominio.

**Palabras Clave:**

Dinámica de Poblaciones.

Difusión Espacial.

Competición Estocástica.

Movimiento Browniano.

---

## ABSTRACT

### Partial Differential Equations in Problems of Spatial Diffusion in Dynamics of Populations in Random Environment

Duran Quiñones, Sofía Irena

Marzo, 2019

**Adviser** : Dra. María Natividad Zegarra Garay.

**Obtained Title** : Master in Mathematics.

---

In this thesis, In this thesis we study the dynamics of populations of a system with spatial diffusion and environmental stochasticity. Unlike the traditional models of population dynamics analyzed by the Ordinary Differential Equations, we consider in this work the diffusion of the populations in the territory and the stochastic variation of the environment applied to a model of evolution in Partial Differential Equations and Differential Equations Stochastic. Spatial diffusion is applied to individuals in the population, considering an analogy with gas dynamics, that is, considering individuals in the population analogous to gas molecules, which implies that population density will follow Fick's law with a diffusion equation of type,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \nabla \cdot \nabla u + f(u)$$

The stochastic variation of the environment is modeled using the theory of Stochastic Differential Equations, which implies, random perturbations of the Brownian movement type on the environmental conditions, this leads to the population dynamics being modeled using an evolution equation of the type,

$$X(t) = x_0 + \int_0^t \alpha(t, X(t))dt + \int_0^t \sigma(t, X(t))dB(t)$$

If you join in a model with spatial diffusion and with environmental stochasticity, for the population dynamics you will have a Stochastic Partial Differential Equation

of the form,

$$\frac{\partial X}{\partial t} = D \nabla \cdot \nabla X + f(X) + \sigma(X(t)) dB(t)$$

This thesis studies the existence and uniqueness of a stochastic competition model for "n" species with spatial diffusion, which can be written in summary form as the following system,

$$dN_i(t, x) = \left( a_i - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} N_j(t, x) N_i(t, x) + \epsilon_i \Delta N(t, x) \right) dt + \rho_i N_i(t, x) dW_t$$

where  $W_t = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i W^{(i)}(t)$  with Neumann conditions on the boundary,  $\nabla N_i(t, x) \cdot \vec{x} = 0$  for  $x$  in the boundary domain.

**Keywords:**

Population dynamics.

Spatial diffusion.

Stochastic competition.

Brownian movement .

---

# Introducción

Las teorías matemáticas desde el inicio de la humanidad han proporcionado una importante herramienta en el análisis-comprensión y dominio del entorno en el que se desarrolla los avances científicos. Es importante resaltar que las primeras manifestaciones de desarrollo matemático fueron de carácter eminentemente práctico. Las primeras civilizaciones como la babilónica o egipcia no contaban con marco axiomático en el cual encajar el conocimiento matemático, muy por el contrario su conocimiento se articulaba a través de múltiples reglas y algoritmos con los cuales podían resolver problemas cotidianos, sin embargo no podemos decir que eran menos sofisticados, pues muchos de ellos estaban asociados a la geomensura y a problemas de administración del estado. La situación cambió sólo con el florecimiento de la cultura clásica griega, específicamente con los trabajos de Euclides quien, a través de sus famosos axiomas y postulados independizó a la geometría de su aplicación directa, iniciándose de esta forma, la era de la matemática formal lo que significó, por una parte la abstracción del contenido matemático y por otra la aplicación en su mayor grado, pues los resultados ahora son de carácter universal sin depender de problemas puntuales.

Los posteriores siglos de desarrollo matemático han desarrollado siempre estos dos flujos de inspiración, la abstracto y lo aplicativo. Se puede recordar por ejemplo el inicio del cálculo diferencial con los trabajos de Newton inspirados en los estudios de las leyes del movimiento, pero simultáneamente con Leibniz hacia una construcción independiente partiendo de problemas puramente geométricos. La física ha continuado por muchos años siendo una fuente inagotable de problemas que han inspirado un sin número de desarrollos teóricos como la Teoría de Operadores sobre

la cual se formaliza la Física Cuántica. La física no es la única ciencia en aportar en el avance del conocimiento matemático; en el último siglo otras disciplinas también han contribuido enormemente en desafiar a las ciencias matemáticas con problemas altamente complejos; una de ellas es la biología.

A inicios del siglo XX se inaugura formalmente la biomatemática, nuevamente con los trabajos simultáneos e independientes de dos matemáticos; el italiano Vito Volterra (1860-1940) y el húngaro-estadounidense Alfred Lotka (1880-1949). En los años 1920, Volterra era considerado uno de los más grandes matemáticos de su época, su yerno el biólogo Umberto D’Ancona (1896-1964), le propuso explicar matemáticamente el comportamiento periódico de dos especies pelágicas del norte adriático. Volterra propone un sistema de ecuaciones diferenciales, hoy conocidos como el sistema *predador-presa*, el cual reproducía de forma satisfactoria las variaciones observadas por D’Ancona, su trabajo fue publicado en 1927 bajo el nombre “*Variazioni e fluttuazione del numero d’individui in specie animali conviventi*”.<sup>29</sup> Por otro lado, Lotka, quien tenía múltiples intereses de estudio y había incursionado en disciplinas como la estadística, la física y la química, en la década de los 20 estaba muy resuelto en aplicar principios físicos a la biología evolutiva propuesta por Darwin, y esa línea de trabajo fue que lo llevó a proponer un sistema de ecuaciones equivalente a las de Volterra para describir una relación trófica entre dos especies.<sup>16</sup> Dicho sistema, actualmente es denominado ecuaciones de “*Lotka-Volterra*”.<sup>21</sup>

A partir de entonces, se han propuesto diversos modelos para estudiar aspectos específicos de la dinámica de poblaciones y el enfoque matemático ha demostrado tener un gran impacto por su fuerte capacidad explicativa y predictiva. Según, en donde se centre el interés de estudio, han surgido modelos que consideran estructuras de edades, retardos funcionales, diversificación sexual, efecto Allee entre otros.

En el presente trabajo, el interés está puesto en la dinámica espacial de las especies, es decir el movimiento de las especies dentro de un dominio ecológico y la contribución original se encuentra en la inclusión de perturbaciones estocásticas ambientales en la dinámica. En particular se estudiará un modelo de competencia

específico que incluye difusión espacial y estocasticidad ambiental.

Para los efectos de esta disertación, se presenta esta tesis en 8 capítulos. El capítulo I presenta definiciones y teoremas de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias que se aplicarán en el segundo capítulo. Se fundamentan las ecuaciones de reacción-difusión que se presentarán a lo largo de los capítulos. En el capítulo II se exponen los principales resultados de la teoría de procesos estocásticos, que contribuirán en el desarrollo del modelo que se presenta en el último capítulo. En el capítulo III se presentan modelos clásicos de la dinámica de poblaciones, los cuales son generados mediante ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales; es presentado un modelo mutualista en ecología, en este se exhiben resultados numéricos para las soluciones temporales y espaciales como una pequeña contribución a este trabajo. En el capítulo IV se expone la dinámica de poblaciones estocásticas y se presentan algunos modelos específicos. En el capítulo V, se demuestra la existencia y unicidad de la solución del modelo de la Dinámica Estocástica Impulsiva. En el capítulo VI, como resultado principal de esta tesis, se expone un modelo de competencia que presenta difusión espacial y estocasticidad ambiental. En el capítulo VII, se dan las conclusiones generales del estudio así como una visualización de posibles trabajos futuros. Se presentan apéndices.



---

# Índice general

<b>1. Reacción-Difusión</b>	<b>1</b>
1.1. Teoría Cualitativa . . . . .	1
1.2. Ecuaciones de Evolución . . . . .	5
1.3. Ecuación de Difusión . . . . .	6
1.4. Ecuaciones de Reacción Difusión . . . . .	7
1.4.1. Sistemas de Reacción-Difusión de un Componente . . . . .	8
1.4.2. Biología: Reacción-Difusión . . . . .	9
<b>2. Ecuaciones Diferenciales Estocásticas</b>	<b>10</b>
2.1. Procesos Estocásticos y Martingalas . . . . .	10
2.1.1. Martingala . . . . .	14
2.1.2. Movimiento Browniano . . . . .	14
2.1.3. Ruido Blanco . . . . .	16
2.1.4. Martingala . . . . .	16
2.1.5. Movimiento Browniano Geométrico . . . . .	17
2.1.6. Tiempos de parada . . . . .	18
2.1.7. Integral de Itô . . . . .	19
2.1.8. Teorema de Existencia y Unicidad . . . . .	21
2.1.9. Fórmula de Itô. Segunda Versión . . . . .	21
2.2. Análisis Estocástico en Espacios de Hilbert . . . . .	22
2.2.1. Movimiento Browniano en Espacios de Hilbert . . . . .	23
2.2.2. Fórmula de Itô en Espacios de Hilbert . . . . .	24

<b>3. Modelos Clásicos de la Dinámica de Poblaciones</b>	<b>28</b>
3.1. Modelo de Crecimiento Exponencial. . . . .	29
3.2. Modelo de Crecimiento Logístico . . . . .	30
3.3. Modelos Lotka-Volterra . . . . .	32
3.3.1. Competición . . . . .	32
3.3.2. Depredador-Presa . . . . .	35
3.4. Modelos Poblacionales con Difusión en el Espacio . . . . .	37
3.4.1. Un Modelo Mutualista en Ecología . . . . .	40
<b>4. Dinámica Estocástica de Poblaciones</b>	<b>52</b>
4.1. Estocasticidad Demográfica . . . . .	53
4.2. Estocasticidad Ambiental . . . . .	59
<b>5. Dinámica Estocástica Impulsiva</b>	<b>63</b>
5.1. Un Modelo Estocástico Impulsivo . . . . .	63
5.1.1. Buen Planteamiento del Sistema . . . . .	65
<b>6. Un Modelo Estocástico de Competición con Difusión Espacial</b>	<b>75</b>
<b>7. Conclusiones y Posibles Trabajos Futuros</b>	<b>84</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>90</b>

---

# Capítulo 1

## Reacción-Difusión

En este capítulo se presentan resultados principales sobre la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias. En la teoría de ecuaciones diferenciales parciales se estudia las ecuaciones de evolución, dedicando especial atención a los sistemas de reacción-difusión.

### 1.1. Teoría Cualitativa

**Definición 1.1.** *La formulación matemática de un proceso determinista es un sistema dinámico, el cual consigue prever cualquier estado futuro, cuando está definido el operador de evolución y el estado inicial. Si el tiempo para este operador se define en la recta real, se habla de un sistema dinámico continuo.*

Considere el siguiente sistema,

$$\dot{u} = f(u) \tag{1.1}$$

donde  $u \in U$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  un campo vectorial de clase  $C^1$  definido en un conjunto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , es un sistema dinámico continuo y sus trayectorias  $\varphi_f : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisfacen:

1.  $\varphi_f(0, u) = u$ , para todo  $u \in U$ .
2.  $\varphi_f(t + s, u) = \varphi_f(t, \varphi_f(s, u))$ , para todo  $u \in U$ ;  $t, s \in \mathbb{R}$ .
3.  $\frac{d}{dt}\varphi_f(t, u) = f(\varphi_f(t, u))$ .

**Definición 1.2.**

1. Si  $f(u^*) = 0$ , entonces  $u^* \in U$  es un punto de equilibrio para el sistema (1.1)  
El conjunto  $L_0 = \{u \in U : \varphi_f(t, u_0) = u \text{ para } t \in \mathbb{R}\}$  es una órbita que inicia en  $u_0 \in U$ .
2. Una órbita  $L_0$  que inicia en  $u_0 \in U$  es homoclínica al punto de equilibrio  $u^* \in U$  si  $\varphi_f(t, u) \rightarrow u^*$  cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ .
3. Si existe otro punto de equilibrio  $u^{**} \in U$  en el sistema (1.1) la órbita  $L_0$  que inicia en  $u_0 \in U$  es heteroclínica a los puntos  $u^*$  y  $u^{**}$  si  $\varphi_f(t, u) \rightarrow u^*$  para  $t \rightarrow -\infty$  y  $\varphi_f(t, u) \rightarrow u^{**}$  cuando  $t \rightarrow +\infty$
4. Un punto  $u_0 \in U$  es un punto  $\omega$ -límite de la trayectoria  $\varphi_f$  del sistema (1.1), si existe una sucesión  $t_n \rightarrow +\infty$  que verifique,

$$\lim_{t_n \rightarrow +\infty} \varphi(t_n, u) = u_0$$

5. De manera similar, si existe una sucesión  $t_n \rightarrow -\infty$  que verifique

$$\lim_{t_n \rightarrow -\infty} \varphi(t_n, u) = u_1$$

y el punto  $u_1 \in U$ ; entonces  $u_1$  se le conoce como punto  $\alpha$ -límite de la trayectoria  $\varphi_f$  del sistema (1.1).

6. Al conjunto de todos los puntos  $w$ -límite de una trayectoria  $L_0$  se le llama conjunto  $\omega$ -límite de  $L_0$  y se denota por  $\omega(L_0)$ . De igual manera, se tiene el conjunto  $\alpha$ -límite de  $L_0$  y se denota por  $\alpha(L_0)$ .
7. Una órbita periódica  $L_0$  es cualquier curva cerrada solución del sistema (1.1) que no sea un punto de equilibrio.
8. Un ciclo límite  $\Psi$  es una órbita periódica del sistema (1.1) el cual es el  $\alpha$ -límite o  $\omega$ -límite de alguna trayectoria de (1.1) que no sea  $\Psi$ .

**Definición 1.3.** Si el campo vectorial  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^1$  definido en un conjunto  $U \subset \mathbb{R}^2$  es no lineal, un punto de equilibrio  $u^* \in U$  es un punto de equilibrio

hiperbólico del sistema (1.1) si la matriz jacobiana,  $A = Df(u^*)$  es hiperbólica. (lo que significa que  $A$  tiene valores propios todos con parte real no nula).

Se observa que  $A$  es la parte lineal del sistema (1.1) en  $u^* \in U$ . Por lo tanto, el siguiente teorema determina la estabilidad local de cada punto de equilibrio hiperbólico  $u^* \in U$  del sistema (1.1) por medio de los autovalores de la parte lineal  $A$  calculada en  $u^*$ .

**Teorema 1.1. [Hartman-Grobman]**

Sea  $u^* \in U$  un punto de equilibrio hiperbólico de  $\dot{u} = f(u)$  para  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vectorial de clase  $C^1$  definido en un conjunto  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Entonces, existe un homeomorfismo  $h : V \rightarrow W$  entre vecindades  $U$  de  $u^*$  y  $V$  de  $(0,0) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $h \circ \varphi_f = \varphi_A \circ h$ ,  $A = \frac{\partial}{\partial u} f(u_*)$ , i.e., las trayectorias  $\varphi_f$  y  $\varphi_A$  son localmente conjugadas.

Los conjuntos

$$W_S(u^*) = \{u \in U : \varphi_f(t, u) \rightarrow u^*, t \rightarrow +\infty\},$$

$$W_u(u^*) = \{u \in U : \varphi_f(t, u) \rightarrow u^*, t \rightarrow -\infty\},$$

son llamados invariantes, donde  $W_S(u^*)$  es llamada la variedad estable del punto de equilibrio  $u^* \in U$  del sistema (1.1) y  $W_u(u^*)$  la variedad inestable de  $u^* \in U$ .

Si  $A = \frac{\partial}{\partial u} f(u_*)$  es la parte lineal del sistema (1.1) en  $u_* \in U$  y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^1$ , definido en un conjunto  $U \subset \mathbb{R}^2$ , tal que para algún  $\lambda \in C$ , la matriz  $A_\lambda = A - \lambda I$  posee inversa, entonces  $\lambda$  es el resolvente de  $A$ . De igual forma,  $\lambda \in C$  es un valor regular de  $A$  si  $R_\lambda(A) = A_\lambda^{-1}$  existe, es acotada y es definida en un subconjunto denso en  $\mathbb{R}^n$ .

El conjunto resolvente  $\rho(A)$  de  $A = \frac{\partial}{\partial u} f(u_*)$  es el conjunto de todos los valores regulares  $\lambda \in C$  de  $A$ . El complemento  $\sigma(A) = C - \rho(A)$  es llamado el espectro de  $A$ , y  $\lambda \in \sigma(A)$  es llamado el valor espectral de  $A$ .

Por otro lado, dos sistemas de ecuaciones diferenciales de tipo (1.1) son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  el cual realice un mapeo

de trayectorias del primer sistema en trayectorias del segundo sistema, preservando la dirección del tiempo.

*Demostración.* Ver<sup>3</sup>

□

**Lema 1.2. [Hartman-Grobman]**

Sea  $f$  de clase  $C^1$  y  $u$  un punto de equilibrio hiperbólico del sistema plano  $u = f(u)$ . Entonces existe una vecindad de  $\bar{u}$  en la cual  $u = f(u)$  es topológicamente equivalente a su linealización  $u = Df(\bar{u})u$ .

*Demostración.* Ver<sup>3</sup>

□

El teorema anterior garantiza entonces, que para puntos de equilibrio hiperbólicos, el comportamiento del sistema no lineal cerca del punto, es idéntico al del sistema lineal correspondiente, y por tanto todas las nociones antes vistas coinciden. Para puntos de equilibrio no hiperbólicos es necesario utilizar otras técnicas (o hallar las soluciones del sistema) para determinar el comportamiento. Dentro de estas técnicas se encuentra el método directo de Lyapunov que ataca el problema de la estabilidad directamente sobre la ecuación en cuestión en lugar de su linealización. Aunque esto pareciera muy adecuado, se requiere de ciertas funciones (conocidas como: funciones de Lyapunov) cuya existencia no está garantizada y que, en general, no pueden construirse de manera metódica. Para más detalles al respecto pueden revisarse las referencias.<sup>19</sup>

A partir de la linealización de  $f$  en un punto de equilibrio  $x$  es posible a veces determinar la estabilidad del mismo de manera análoga al caso lineal. El siguiente teorema, cuya prueba puede encontrarse en,<sup>19</sup> describe la estabilidad en dos casos particulares.

**Teorema 1.3. [Criterio de estabilidad para sistemas no lineales]**

Sea  $f$  de clase  $C^1$ ,  $\bar{x} = f(\bar{x})$  un sistema plano y  $\bar{x}$  un punto de equilibrio del mismo.

1. Si todos los valores propios de  $Df(\bar{x})$  tienen parte real negativa, entonces  $\bar{x}$  es un punto de equilibrio asintóticamente estable (y por lo tanto, estable).
2. Si al menos un valor propio de  $Df(\bar{x})$  tiene parte real positiva entonces  $\bar{x}$  es un punto de equilibrio inestable.

**Observación:** Nótese que el teorema 1.1 no ofrece información alguna para cuando hay valores propios con parte real nula. Esto no es casualidad pues en tal caso no es posible determinar la naturaleza del punto de equilibrio a partir de la linealización.

### Clasificación de Puntos de Equilibrio

Del teorema (1.1) y del criterio de estabilidad dado en el teorema (1.3) se puede elaborar la siguiente tabla para los equilibrios de sistemas no lineales y lineales.

Autovalores Df	Linealización		Sistema no Lineal	
	Tipo	Estabilidad	Tipo	Estabilidad
<b>Equilibrios Hiperbólicos</b>				
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Nodo	I.	Nodo	I.
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Nodo	A. E.	Nodo	A. E.
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Punto silla	I.	Punto silla	I.
$\lambda_{1,2} = a \pm ib, a > 0$	Punto espiral	I.	Punto espiral	I.
$\lambda_{1,2} = a \pm ib, a < 0$	Punto espiral	A. E.	Punto espiral	A. E.
<b>Equilibrios no Hiperbólicos</b>				
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Nodo propio / impropio	I.	Nodo / punto espiral	I.
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Nodo propio / impropio	A. E.	Nodo / punto espiral	A. E.
$\lambda_{1,2} = \pm ib$	centro	E.	Centro / punto espiral	?

## 1.2. Ecuaciones de Evolución

Una ecuación de evolución es una ecuación en derivadas parciales que describe la variación temporal de alguna magnitud de interés. Más formalmente se podría escribir,

$$Au(x, t) + f(x, t) = 0$$

donde  $u$  es la función incógnita de la ecuación, dependiente de la variable espacial  $x \in \mathbb{R}^n$  y la variable temporal  $t \in \mathbb{R}_+$ . El parámetro  $A$  es un operador diferencial en las variables espacial y temporal y  $f$  es una función espacio-temporal dependiente.

La función  $u$  estará definida en algún oportuno espacio funcional, usualmente un espacio de Sovolev.

Un ejemplo de este tipo de ecuaciones es la siguiente,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$$

que representa el movimiento de onda unidimensional. En este ejemplo se tiene,

$$A = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \text{y} \quad f \equiv 0.$$

Para el buen planteamiento de este problema se requiere establecer con condiciones que aseguren existencia y unicidad de la solución, típicamente estas condiciones son de tipo valor inicial o valor en la frontera.<sup>27</sup>

### 1.3. Ecuación de Difusión

La llamada ecuación de difusión que presentamos es una ecuación en derivadas parciales, la cual describe fluctuaciones de densidad en un material que se difunde. Utilizada también para describir los procesos que muestran un comportamiento difusivo.<sup>7</sup>

Una forma estandar de esta ecuación es,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = D \nabla^2 \psi(\vec{r}, t),$$

donde:

$\psi$ : Concentración de dispersión del material.

$t$ : Tiempo.

$D$ : Coeficiente de difusividad colectivo.

$\vec{r}$ : Coordenada espacial.

$\nabla$ : Operador diferencial nabla (vector).

Se observa que la ecuación es lineal. Cuando  $D$  está en función de la densidad y



posición, la ecuación se transforma en,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla \cdot (D(\psi, \vec{r}) \nabla \psi(\vec{r}, t)),$$

la cual continua lineal, cuando  $D$  ya no está en función de la densidad, más generalmente, si  $D$  es una matriz simétrica definida positiva, entonces la ecuación define un tipo de difusión anisótropa.

Desde la ecuación de continuidad podemos también deducir que la misma expresa, que si un volumen manifiesta un cambio en su densidad esto sólo es debido a que hay un flujo de entrada y/o de salida de la materia, puesto que la materia dentro del volumen no puede destruirse ni crearse. La siguiente expresión es la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

donde  $\vec{j}$  es el flujo del material que se dispersa. Si combinamos la Ley de Fick que dice: “el flujo de la materia que se difunde en cualquier parte del sistema es proporcional al gradiente local de densidad” de esta última relación se obtiene fácilmente “la ecuación de difusión:”

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = -D(\psi) \nabla \psi(\vec{r}, t).$$

## 1.4. Ecuaciones de Reacción Difusión

Los modelos matemáticos que describen como una o más sustancias distribuídas en el espacio cambian bajo la influencia de dos procesos: reacciones químicas locales en las que las sustancias se transforman las unas en las otras y la difusión que provoca que las sustancias se expandan en el espacio son llamados sistemas de reacción-difusión. El resultado de este proceso es una configuración estable en la que la composición química es no uniforme en un dominio espacial.<sup>7</sup>

Los sistemas de reacción-difusión se aplican al modelamiento de procesos tanto químicos como dinámicos de naturaleza no química.

Podemos encontrar ejemplos de tales aplicaciones en biología, geología, física y ecología. En términos matemáticos, los sistemas de reacción-difusión toman la forma de ecuaciones parabólicas en derivadas parciales, más generalmente se representan en la forma siguiente,

$$\partial_t \mathbf{q} = \mathbf{D} \Delta \mathbf{q} + \mathbf{R}(\mathbf{q}),$$

donde cada componente del vector  $q(x, t)$  representa la concentración de una sustancia,  $\mathbf{D}$  es una matriz diagonal de coeficientes de difusión,  $\Delta$  representa al operador laplaciano y  $R$  representa a las reacciones locales.

Las soluciones de las ecuaciones de reacción-difusión muestran un amplio rango de comportamientos, incluyendo la formación de ondas viajeras y fenómenos de tipo onda, así como otros patrones auto-organizados como bandas, hexágonos o estructuras más complicadas como solitones disipativos.

#### 1.4.1. Sistemas de Reacción-Difusión de un Componente

“La ecuación de reacción-difusión más simple, también llamada ecuación KPP (Kolmogorov-Petrovsky-Piskounov)<sup>15</sup> afecta a la concentración de una sola sustancia en una dimensión espacial”, esto es,

$$\partial_t \psi = D \partial_x^2 \psi + R(\psi),$$

Si se elimina  $R(\psi)$ , término de reacción la expresión representa solo un proceso de difusión, y es la llamada ecuación del calor unidimensional.

- Si  $R(\psi) = \psi(1 - \psi)$ , se obtiene la llamada ecuación de *Kolmogorov-Fisher*, la cual fue utilizada originalmente para describir la expansión de las poblaciones biológicas.<sup>1</sup>
- Si  $R(\psi) = \psi(1 - \psi^2)$ , se obtiene la llamada ecuación de *Newell-Whitehead-Segel* para describir la convección de Benard.<sup>22</sup>
- Si  $R(\psi) = \psi(1 - \psi)(\psi - \beta)$  y  $0 < \beta < 1$ , se obtiene la llamada “ecuación de

*Zeldovich* que aparece en la teoría de la combustión”, y su caso degenerado, con  $R(\psi) = \psi^2 - \psi^{313}$ ,

$$\partial_t \psi = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}$$

### 1.4.2. Biología: Reacción-Difusión

Uno de los importantes aportes al estudio de los sistemas biológicos es el de *Alan Turing* (1952), quien propone: “la base química de la morfogénesis”, derivándose de esto, que los sistemas conocidos como reacción-difusión se apliquen al modelamiento de un sin número de procesos biológicos que se utilizan en la de formación de patrones.

Por ejemplo se tiene que, en los sistemas químicos, toda reacción química es la base de todo componente molecular, por otro lado, la difusión dentro del concepto del movimiento browniano viene a ser un proceso clásico físico. Esta teoría del desarrollo de los tejidos contempla dos procesos: uno el de reacción, otro el de difusión, ambos sumamente complejos, dado que para el caso del proceso de reacción, éste implica que las células produzcan y consuman moléculas, además de transportarlas a través de los tejidos; también éste consigue generar gradientes moleculares, tornándose mucho más complejo que el proceso de difusión. Los mecanismos de Turing son por tanto, aplicables a este tipo de propuesta de procesos biológicos denominados en este capítulo, como “reacción-difusión”. Para más información puede consultarse.<sup>7</sup>

---

## Capítulo 2

# Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

En este capítulo se presentan los principales fundamentos de la teoría de procesos estocásticos con el fin de contribuir en el desarrollo del modelo que se trabajará más adelante, los resultados fueron extraídos principalmente de los textos: Øksendal, *Stochastic Differential Equations: an introduction with applications*<sup>23</sup> y de L. Rincón, *Introducción a los procesos estocásticos*.<sup>25</sup>

### 2.1. Procesos Estocásticos y Martingalas

Los procesos estocásticos son una parte ampliamente desarrollada de la teoría de probabilidades con diversas aplicaciones, tanto en las matemáticas como fuera de éstas. Dentro de las matemáticas los procesos estocásticos tienen una profunda conexión con la teoría de semigrupos de operadores y ecuaciones diferenciales parciales entre otras, los procesos estocásticos tienen un amplio espectro de aplicaciones, en estadística, ingeniería, física, química, biología, etc., en definitiva son aplicados en cualquier tema donde sea necesario aplicar modelos matemáticos que consideren factores aleatorios.

Antes de definir el movimiento Browniano se definirán algunos aspectos matemáticos fundamentales para el entendimiento de la teoría de procesos estocásticos

como el espacio de probabilidad y la esperanza matemática.

**Espacio de Probabilidad.** Se llamará espacio de probabilidad a la terna  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  la cual está compuesta de un conjunto  $\Omega$ , una  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$  compuesta de subconjuntos de  $\Omega$  y una medida de probabilidad  $\mathbb{P}$  definida sobre el espacio medible  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

**Variable Aleatoria.** Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad y un espacio medible  $(E, \mathcal{E})$  se llamará variable aleatoria a una aplicación medible  $X$  de  $(\Omega, \mathcal{A})$  en  $(E, \mathcal{E})$ , es decir,  $X$  es una variable aleatoria si y solo si para cada  $B \in \mathcal{E}$  se tiene,

$$X^{-1}(B) = \{w \in \Omega | X(w) \in B\} \in \mathcal{A}$$

**Esperanza Matemática.** Sea  $X$  una variable aleatoria con valores reales definida en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  se llamará esperanza matemática de  $X$  a la integral de  $X$  y se denota como  $\mathbb{E}(X)$ .<sup>28</sup>

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X(w) \mathbb{P}(dw)$$

Debido a su definición como integral, la esperanza matemática verifica las siguientes desigualdades.

**Desigualdad de Hölder.**

$$\mathbb{E}(|XY|) \leq (\mathbb{E}(|X|^p))^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}(|Y|^q))^{\frac{1}{q}}, \quad p, q \in ]1, +\infty[, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

**Desigualdad de Cauchy-Schwarz.**

$$(\mathbb{E}(XY))^2 \leq \mathbb{E}(X)^2 \mathbb{E}(Y)^2$$

**Desigualdad de Liapunov.** Considere  $0 < \alpha < \beta$ ; en la desigualdad de Hölder se toma  $p = \beta/\alpha$ ,  $q = \beta/(\beta - \alpha)$ , y  $Y(\omega) = 1$  y sustituyendo  $X$  por  $|X|^\alpha$ . Se tiene,

$$E^{1/\alpha} \left[ |X|^\alpha \right] \leq E^{1/\beta} \left[ |X|^\beta \right]; \quad 0 < \alpha \leq \beta.$$

**Desigualdad de Minkowski.**

$$(\mathbb{E}(|X + Y|^p))^{\frac{1}{p}} \leq (\mathbb{E}(|X|^p))^{\frac{1}{p}} + (\mathbb{E}(|Y|^p))^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

**Desigualdad de Jensen.** Una función  $g$  sobre un intervalo es convexa si  $g(px + (1 - p)y) \leq pg(x) + (1 - p)g(y)$  para  $0 \leq p \leq 1$  y  $x, y$  en el intervalo. Una condición suficiente es que  $g$  tenga una segunda derivada no negativa. Se sigue por inducción que  $g(\sum_{i=1}^l p_i x_i) \leq \sum_{i=1}^l p_i g(x_i)$  si  $p_i$  son no negativas y suman 1 y  $x_i$  están en el dominio de  $g$ . Si  $X$  toma el valor  $x_i$  con probabilidad  $p_i$  se tiene,

$$g(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(g(X))$$

**Desigualdad de Márkov.** Si  $X$  es no negativo, entonces para  $\alpha$  positivo (la suma sobre el rango de  $X$ )

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x \mathbb{P}\{X = x\} \geq \sum_{x \geq \varepsilon} x \mathbb{P}(X = x) \geq \varepsilon \sum_{x \geq \varepsilon} \mathbb{P}(X = x)$$

luego,

$$\mathbb{P}(\{|X| > \varepsilon\}) = \mathbb{P}(\{w \in \Omega : |X(w)| > \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E}(|X|), \quad \varepsilon > 0$$

Si  $X$  es no negativo y  $\alpha$  positivo, aplicando en la desigualdad anterior para  $|X|^k$  se tiene la desigualdad de Márkov,

$$\mathbb{P}(\{|X| > \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^k} \mathbb{E}(|X|^k), \quad \varepsilon > 0$$

**Desigualdad de Chebyshev.** De la expresión anterior si  $k = 2$  y  $\mathbb{E}(X)$  es sustraída de  $X$  se tiene,

$$\mathbb{P}(\{w \in \Omega : |X(w) - \mathbb{E}(X)| > \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \text{Var}(X), \quad \varepsilon > 0$$

donde  $\text{Var}(X)$  es la varianza de  $X$  la cual se define como

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$$

**Eventos Independientes.** Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad y sean  $A$  y  $B$  dos eventos ( $A, B \in \mathcal{A}$ ) se dicen independientes si,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

**Independencia de  $\sigma$ -álgebras.** Sean  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$  dos  $\sigma$ -álgebras contenidas en  $\mathcal{A}$  se dicen independientes si, para cualquier  $B \in \mathcal{B}$  y  $C \in \mathcal{C}$ , entonces  $B$  y  $C$  son independientes.

**Independencia de Variables Aleatorias.** Sean  $X$  e  $Y$  dos “variables aleatorias definidas en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  con valores en un espacio medible  $(E, \mathcal{E})$ ” y en un espacio medible  $(F, \mathcal{F})$ , se dicen independientes si la  $\sigma$ -álgebra  $\{X^{-1}(E') | E' \in \mathcal{E}\}$  inducida por  $X$  y la  $\sigma$ -álgebra  $\{Y^{-1}(F') | F' \in \mathcal{F}\}$  inducida por  $Y$  son independientes.

Si  $X$  e  $Y$  son dos variables aleatorias con valores reales independientes, entonces se tiene,

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

además se tiene la covarianza definida como,

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Si  $X$  e  $Y$  son independientes entonces se cumple,

$$cov(X, Y) = 0$$

y si  $X = Y$ , se tiene,

$$Cov(X, Y) = Var(X)$$

**Filtración.** Sea  $(\Omega, F, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad, y sea  $I$  un intervalo  $\mathbb{R}_+ = [0, \infty[$  ó  $[0, t_1]$  se dice filtración a una familia  $\{F_t\}_{t \in I}$  de sub- $\sigma$ -álgebras de  $F$  tal que  $F_s \subset F_t$  para cada  $s, t \in I$ ,  $s \leq t$  la filtración  $\{F_t\}_{t \in I}$  se denotará  $(F_t)_{t \in I}$  o si no hay riesgo de equívoco, más simplemente  $(F_t)_t$ . En este caso el conjunto  $(\Omega, F, (F_t)_t, \mathbb{P})$  se dice base estocástica.

### 2.1.1. Martingala

Un proceso estocástico  $X(t)$ , es una martingala respecto de una filtración  $F_t$  con  $t \geq 0$  si satisface las siguientes propiedades:

1.  $X(t)$  es medible con respecto a la filtración  $F_t$ ,  $\forall t \geq 0$ .
2.  $\mathbb{E}[|X(t)|] < \infty$ .
3.  $\mathbb{E}[X(t)|F_t] = X(s)$  si  $s < t$ , es decir, la esperanza condicionada de los incrementos de una martingala es cero.

**Observación:** Se puede demostrar que el movimiento Browniano es una martingala, para un mayor detalle consultar.<sup>25</sup>

**Lema 2.1. [Desigualdad de Doob]** *Considere una martingala  $\{M(t), 0 \leq t \leq T\}$  de trayectorias continuas. Entonces, para todo  $p \geq 1$  y todo  $\lambda > 0$  se verifica,*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |M(t)| > \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda^p} \mathbb{E}(|M(T)|^p)$$

*Demostración.* Ver.<sup>4</sup>

□

### 2.1.2. Movimiento Browniano

El estudio del movimiento Browniano comenzó en 1827 debido al botánico escocés R. Brown (1773-1858), quien observara un movimiento continuo y aleatorio de minúsculas partículas flotantes de granos de polen. En 1905 Einstein y Smoluchowski le dieron una explicación física y matemática atribuyéndolo a movimientos causados por la colisión entre las partículas flotantes y las moléculas de agua o aire.<sup>28</sup>

El matemático norteamericano Norbert Wiener (1894-1964) formalizó matemáticamente el movimiento Browniano demostrando el buen planteamiento de un proceso con ciertas características descritas por Brown, por lo cual a menudo se le denomina:



“Proceso de Wiener y se denota por  $\{W_t : t \geq 0\}$ ”<sup>25</sup>

Un movimiento Browniano en una dimensión es “un proceso estocástico denotado como  $\{B_t : t \geq 0\}$  con valores en los reales con las siguientes propiedades:

- $B_0 = 0$  c.t.p.
- Sus trayectorias son continuas.
- Posee incrementos independientes.
- $B_t - B_s$  tiene distribución  $N(0, \sigma^2(t - s))$ ”.

O en otras palabras un proceso estocástico  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  definido sobre una base estocástica  $(\Omega, F, (F_t)_t, \mathbb{P})$  con valores en  $\mathbb{R}$  se dice movimiento Browniano, si se verifican las siguientes tres condiciones:

- $B_0 = 0$  c.t.p.
- Para cada  $(s, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$  con  $s \leq t$ : “la variable aleatoria  $B_t - B_s$  es independiente de la  $\sigma$ -álgebra  $F_s$ ”.
- Para cada  $(s, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ , con  $s < t$  la ley de la variable aleatoria  $B_t - B_s$  es

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} e^{\frac{-x^2}{2(t-s)}} dx,$$

donde  $dx$  es la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}$ .

**Definición:** Un proceso estocástico  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  definido en una base estocástica  $(\Omega, F, (F_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$  con valores en  $\mathbb{R}^m$  se dice movimiento Browniano m-dimensional o con valores en  $\mathbb{R}^m$ , si se verifican las siguientes relaciones:

- $B_0 = 0$ , c.t.p.
- Para cualquiera  $s, t, 0 \leq s \leq t$  la variable aleatoria  $B_t - B_s$  es independiente de la  $\sigma$ -álgebra  $F_s$ .

- Para cualquiera  $s, t, 0 \leq s < t$  la ley de la variable aleatoria  $B_t - B_s$  es:

$$f(x)dx = \frac{1}{(2\pi(t-s))^{\frac{m}{2}}} e^{\frac{-|x|^2}{2(t-s)}} dx, \quad |x|^2 = x_1^2 + \dots + x_m^2,$$

donde  $dx$  es la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^m$ .

### 2.1.3. Ruido Blanco

Se tiene que  $B_t = \int_0^t W(s)ds$  proceso estocástico, formalmente se escribirá como

$$\frac{dB_t}{dt} = W(t).$$

De esta forma, se denomina ruido blanco a un proceso  $W(t)$  que satisface las siguientes propiedades:

1. Para cualquier  $t_1, t_2$  con  $t_1 \neq t_2$  entonces  $W(t_1)$  y  $W(t_2)$  son procesos independientes.
2.  $W(t)$  es un proceso estacionario, es decir, la distribución conjunta de,

$$\{W(t_1 + t), W(t_2 + t), \dots, W(t_k + t)\}$$

es independiente de  $t$ .

3.  $\mathbb{E}[W_t] = 0, \forall t$ .

### 2.1.4. Martingala

**Espacio  $L^2(\mathbb{P})$ .** El espacio  $L^2(P)$  es un espacio vectorial de variables aleatorias  $X$  que son cuadrados integrables, es decir,

$$\|X\|_{L^2(P)} = (\mathbb{E}|X|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Así la función  $\|\cdot\|$  define una norma en el espacio  $L^2(\mathbb{P})$ , por lo cual cumple con las siguientes condiciones:

1.  $\|X\| \geq 0$ .
2.  $\|X\| = 0 \iff X = 0 \text{ c.t.p.}$
3.  $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$ .
4.  $\|\alpha X\| \leq |\alpha| \|X\|$  con  $\alpha$  constante.

### 2.1.5. Movimiento Browniano Geométrico

Se tiene un modelo de crecimiento de población de la siguiente forma,

$$\frac{dN_t}{dt} = a_t N_t$$

donde  $N_0$  es dado,  $a_t = r_t + \alpha W_t$ ,  $W_t =$  ruido blanco,  $\alpha =$  constante. Suponiendo  $r_t = r$  constante, la ecuación es equivalente a,

$$dN_t = rN_t dt + \alpha N_t dB_t \quad (2.1)$$

ó

$$\frac{dN_t}{N_t} = r dt + \alpha dB_t$$

Por lo tanto

$$\int_0^t \frac{dN_s}{N_s} = rt + \alpha B_t \quad (2.2)$$

Para desarrollar la integral se utiliza la fórmula de Itô para la función,

$$g(t, x) = \ln x; \quad x > 0$$

obteniendo

$$d(\ln N_t) = \frac{dN_t}{N_t} - \frac{1}{2N_t^2} \alpha^2 N_t^2 dt = \frac{dN_t}{N_t} - \frac{1}{2} \alpha^2 dt$$

Por lo tanto,

$$\frac{dN_t}{N_t} = d(\ln N_t) + \frac{1}{2} \alpha^2 dt$$

Así, de la ecuación (2.2) se concluye,

$$\ln \frac{N_t}{N_0} = (r - \frac{1}{2}\alpha^2)t + \alpha B_t$$

ó

$$N_t = N_0 e^{((r - \frac{1}{2}\alpha^2)t + \alpha B_t)}$$

### 2.1.6. Tiempos de parada

Sea  $F_t$  con  $t > 0$  una filtración, un tiempo de parada relativo a esta filtración es una variable aleatoria,

$$\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$$

tal que para todo  $t \geq 0$ ,  $\{\tau \leq t\} \in F_t$ .

**Ejemplo.** El tiempo de llegada de un proceso continuo y adaptado,  $X(t)$  a un nivel  $a$  definido como

$$\tau_a = \inf\{t > 0 : X(t) = a\}$$

es un tiempo de parada.

### Propiedades de los tiempos de parada

1. Si  $X(t)$  es una martingala continua y  $\tau$  es un tiempo de parada acotado por  $T$ , entonces,

$$\mathbb{E}[X(t)|F_\tau] = X(\tau)$$

2. Si  $X(t)$  es un proceso de clase  $L^2([0, T])$  y  $\tau$  es un tiempo de parada acotado por  $T$ , el proceso  $X1_{[0, \tau]}$  también pertenece a  $L^2([0, T])$  y se verifica la siguiente relación,

$$\int_0^T X1_{[0, \tau]}(t)dB_t = \int_0^\tau X(t)dB_t$$

### 2.1.7. Integral de Itô

La integral estocástica de un proceso simple  $X$  de la forma  $X_t = \sum_{k=0}^{n-1} X^{(k)} 1_{[t_k, t_{k+1})}$ , respecto de un movimiento Browniano, se define como la variable aleatoria,

$$I(X) = \int_0^T X_s dB_s$$

#### Propiedades de la integral de Itô

1. Isometría de Itô:

$$\|I(X)\|_{L^2(\mathbb{P})} = \|X\|_{L^2(\mathbb{P} \times dt)}$$

2. La integral  $I(X)$  es lineal, es decir, sea  $c$  una constante,  $X_s$  e  $Y_s$  en  $L^2_{loc}(\mathbb{P})$  dos procesos cualesquiera, entonces se cumple,

$$\int_0^t (cX_s + Y_s) dB_s = c \int_0^t X_s dB_s + \int_0^t Y_s dB_s$$

3. En  $H^2(\mathbb{P})$  se cumple la isometría de Itô, es decir, sea  $X_s$  un proceso cualquiera,

$$E \left| \int_0^t X_s dB_s \right|^2 = E \int_0^t |x_s|^2 ds$$

4. En  $H^2(\mathbb{P})$  la integral de Itô es una martingala, es decir, es adaptada, integrable y se cumple para  $0 < s < t$  lo siguiente

$$E \left( \int_0^t X_u dB_u \middle| \mathcal{F}_s \right) = \int_0^s X_u dB_u$$

**Proposición 2.1.** *La integral de Itô  $I(X)$  tiene esperanza cero, es decir, para cualquier proceso  $X_s$  en  $L^2_{loc}(\mathbb{P})$ , se tiene,*

$$\mathbb{E} \left( \int_0^t X_s dB_s \right) = 0 \quad (2.3)$$

**Espacios  $H^2(\mathbb{P})$ .** Sea  $H^2(\mathbb{P})$  el espacio de todos los procesos  $X_t$  medibles y adaptados, tales que,

$$\mathbb{E} \int_0^T |X_t|^2 dt < \infty$$

El espacio  $H^2(\mathbb{P})$  es un subespacio lineal cerrado de  $L^2(P \times dt)$ .

**Fórmula de Itô (Primera Versión).** Sea  $f(x)$  una función de clase  $C^2(\mathbb{R})$ , entonces se cumple,

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds$$

**Ejemplo:** Sea  $f(x) = \frac{x^2}{2}$  utilizando la fórmula de Itô se tiene,

$$\frac{B_t^2}{2} - \frac{B_0^2}{2} = \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t ds$$

de donde,

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{B_t^2}{2} - \frac{t}{2}$$

Sea: “ $(\Omega, F, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad y  $B_t$  un movimiento Browniano adaptado a la filtración  $F_t$ ”, entonces se tiene la siguiente definición,

**Definición.** Sean  $b(t, x)$  y  $\sigma(t, x)$  dos funciones de  $[0, T] \times \mathbb{R}$ . Una ecuación estocástica cumple con la siguiente forma,

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s$$

donde  $t \in [0, T]$  y  $X_0$   $F_0$ -medible e independiente. La cual se escribe formalmente de la siguiente forma,

$$\begin{cases} dX_t &= b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \\ X(0) &= X_0 \end{cases} \quad (2.4)$$

### 2.1.8. Teorema de Existencia y Unicidad

Si los coeficientes de  $b(t, x)$  y  $\sigma(t, x)$  satisfacen la condición de Lipschitz para la variable  $x$ , es decir,

$$|b(t, x) - b(t, y)|^2 + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 \leq K|x - y|^2$$

y además verifican,

$$|b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq K(1 + |x|^2)$$

donde  $K > 0$  constante, entonces existe un proceso estocástico  $X_t$  que es solución de la ecuación (2.3) que es adaptado a la filtración de trayectorias continuas y es uniformemente acotado en  $L^2$  y además es único.<sup>23</sup>

### 2.1.9. Fórmula de Itô. Segunda Versión

Sea  $X_t$  un proceso estocástico, dado por la ecuación (2.3) y sea  $f(t, x)$  una función de clase  $C^1$  en  $t$  y de clase  $C^2$  en  $x$ , entonces el proceso definido como  $Y_t = f(t, X_t)$  es también un proceso estocástico y satisface la ecuación,

$$dY_t = f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t)(dX_t)^2 \quad (2.5)$$

Luego se tiene que la ecuación (2.4) se puede sustituir en la ecuación (2.5) utilizando la siguiente tabla de multiplicar de McKean,

$\times$	$dt$	$dB_t$
$dt$	0	0
$dB_t$	0	dt

Se tiene que las derivadas utilizadas en la ecuación, son funciones continuas, así las integrales estocásticas están bien definidas.

**Ejemplo:** Se puede mostrar,

$$\int_0^t s dB_s = tB_t - \int_0^t B_s ds$$

para lo cual se observa que sea el proceso  $X_t = B_t$  y sea la función  $f(t, x) = tx$ , entonces se tiene,

$$d(f(t, B_t)) = f_t(t, B_t)dt + f_x(t, B_t)dB_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, B_t)(dB_t)^2$$

$$d(tB_t) = B_t dt + t dB_t$$

De esta forma se tiene la fórmula diferencial, de la fórmula anterior.

## 2.2. Análisis Estocástico en Espacios de Hilbert

Para cualquier  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  se puede definir un movimiento Browniano  $B_t$  y para su versión canónica se tiene,

$$\mathbb{E}[|B_t|^2] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|B_t^{(i)}|^2] = nt \quad (\text{ó } = t)$$

Según la normalización adoptada; cada componente  $B_t^{(i)}$  tiene la misma distribución de probabilidad en  $\mathbb{R}$  que el movimiento browniano canónico con valores reales o su producto con  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  según la normalización adoptada. Por eso no es posible generalizar el movimiento browniano con valores en  $\mathbb{R}^n$  en un movimiento browniano con valores en,

$$l_2 = \left\{ (a_i)_{i=1}^\infty \mid a_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^\infty (a_i)^2 < \infty \right\}$$

con una normalización natural.

La teoría de Ecuaciones Diferenciales Estocásticas en espacios de Hilbert, ha sido desarrollada por varios autores en los últimos años y sus principales resultados se encuentran contenidos en el libro *Stochastic Equations in Infinite Dimensions*<sup>8</sup> de los autores G. Da Prato y J Zabczyk.



### 2.2.1. Movimiento Browniano en Espacios de Hilbert

Para definir un movimiento browniano  $B_t$  con valores en  $l_2$  con la propiedad  $\mathbb{E}[B_T^2] < \infty$ , se necesita introducir un peso artificial en la definición de  $B_t$ . En cualquier espacio de Hilbert real separable  $H$  se puede definir un movimiento browniano,

$$B_t = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i B_t^{(i)},$$

utilizando una base ortonormal  $(e_i)_{i=1}^{\infty}$  de  $H$ .

La formulación de la fórmula de Itô para la integral estocástica en un espacio de Hilbert no es simple y se requerirá el uso de la derivada de Fréchet para espacios funcionales.

Sea  $B$  un espacio de Banach real y  $H$  un espacio de Hilbert real separable. Sea  $\varphi$  una aplicación de  $B \times H$  en  $\mathbb{R}$ . Supongamos que  $\varphi$  posee las derivadas de Fréchet

Condición de Linealidad:

$$\frac{\partial \varphi(b, h)}{\partial b} \equiv \varphi^{(1,0)}(b, h) \in \mathcal{L}(B, \mathbb{R}),$$

$$\frac{\partial \varphi(b, h)}{\partial h} \equiv \varphi^{(0,1)}(b, h) \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R}),$$

Condición de Bilinealidad:

$$\frac{\partial}{\partial h} \frac{\partial \varphi(b, h)}{\partial h} \equiv \varphi^{(0,2)}(b, h) \in \mathcal{L}(H, \mathcal{L}(H, \mathbb{R}))$$

donde  $\mathcal{L}(Y, Z)$  es el espacio de los operadores lineales continuos del espacio de Banach  $Y$  en el espacio de Banach  $Z$ .

### 2.2.2. Fórmula de Itô en Espacios de Hilbert

Considere

$$\begin{aligned}\varphi & : B \times H \longrightarrow \mathbb{R} \\ (b, h) & \longrightarrow \varphi(b, h)\end{aligned}$$

donde  $\varphi$  verifica las siguientes condiciones,

(i) Para cada  $R > 0$  existe una constante  $C_R > 0$  tal que

$$\begin{aligned}|\varphi(b, h)| & \leq C_R, \quad \|\varphi^{(1,0)}(b, h)\|_{\mathcal{L}(B, \mathbb{R})} \leq C_R \\ \|\varphi^{(0,1)}(b, h)\|_{\mathcal{L}(H, \mathbb{R})} & \leq C_R, \quad \|\varphi^{(0,2)}(b, h)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{L}^1(H, \mathbb{R}))} \leq C_R\end{aligned}$$

$$\text{para } (b, h) \in B \times H, \quad \|b\|_B + \|h\|_H \leq R$$

(ii)  $\varphi : B \times H \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi^{(1,0)} : B \times H \rightarrow \mathcal{L}(B, \mathbb{R})$ ,  $\varphi^{(0,1)} : B \times H \rightarrow \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$  son continuas.

(iii) Para cada  $Q \in \mathcal{L}^1(H)$ , la aplicación

$$(b, h) \rightarrow \varphi^{(0,2)}(b, h)(Q)$$

es continua de  $B \times H$  en  $\mathbb{R}$ .

#### Teorema 2.2.1. [Fórmula de Itô en Espacios de Hilbert]

Sea  $V_t$  un proceso con valores en  $B$  adaptado, continuo y de variación acotada y sea  $M_t$  una martingala con valores en  $H$  tal que  $\mathbb{E}[\|M_t\|_H^2] < \infty$  para todo  $t \leq 0$ . Entonces,

$$\begin{aligned}\varphi(V_t, M_t) &= \varphi(V_0, M_0) + \int_0^t \varphi^{(1,0)}(V_s, M_s) dV_s + \int_0^t \varphi^{(0,1)}(V_s, M_s) dM_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \varphi^{(0,2)}(V_s, M_s) d\langle M \rangle_s\end{aligned}\tag{2.6}$$

La integral  $\int_0^t \varphi^{(1,0)}(V_s, M_s) dV_s$ , está definida en el sentido de la integral de Stieljes, mientras que  $\langle\langle M \rangle\rangle_t$ , llamado *proceso creciente asociado a la martingala*  $M_t$  es el proceso con valores en  $\mathcal{L}^1(H)$  continuo y de variación acotada (en cada intervalo acotado) caracterizada por las condiciones,

- (i) Para cada  $(x_1, x_2) \in H \times H$ ,  $\langle\langle M \rangle\rangle_t x_1 x_2$  es una martingala.
- (ii)  $M_t \otimes M_t - \langle\langle M \rangle\rangle_t e_i, e_j$  es una martingala con valores en  $\mathcal{L}^1(H)$ .
- (iii)  $\|M_t\|_H^2 - \sum_{i=1}^{\infty} \langle\langle M \rangle\rangle_t e_i, e_i$  es una martingala con valores reales ( $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$  base ortonormal de  $H$ ).

Aplicando la fórmula de Itô a una función  $\Phi(X_t)$ , donde  $X_t$  es un proceso estocástico con valores en  $H = L^2(S)$ ,  $S \subset \mathbb{R}^d$  (abierto), se puede expresar como,

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, \cdot) ds + \int_0^t g(s, \cdot) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i(\cdot) dB_s^{(i)} \quad (2.7)$$

donde

$$f \in L^2(\Omega, \mathbb{P}; L^1(0, T; L^2(S))), \quad g \in L^2(\Omega, \mathbb{P}; L^2(0, T)), \quad \forall T > 0,$$

$\{B_t^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$  : movimientos brownianos con valores reales independientes,

$\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$  : base ortonormal de  $L^2(S)$ ,  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 < \infty$ . Para poder aplicar la fórmula de

Itô, se observa que  $\int_0^t f(s, \cdot) ds$  es un proceso con valores en  $H = L^2(S)$  continuo y de variación acotada (en cada intervalo acotado), mientras que,

$$\int_0^t g(s, \cdot) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i(\cdot) dB_s^{(i)}$$

es una martingala con valores en  $H = L^2(S)$ . Por eso se puede escribir en (2.7), aplicando  $\Phi$  se tiene:

$$\Phi(X_t) = \Phi(X_0 + V_t + M_t) \equiv \varphi(V_t, M_t),$$

$$V_t = \int_0^t f(s, \cdot) ds, \quad M_t = \int_0^t g(s, \cdot) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i(\cdot) dB_s^{(i)}.$$

Dado que se tiene  $\frac{\partial \varphi(V_t, M_t)}{\partial V_t} \partial V_t = \frac{\partial \varphi(V_t, M_t)}{\partial M_t} = \frac{\partial \Phi(X_t)}{\partial X_t}$ , la aplicación de la fórmula de Itô se escribe,

$$\begin{aligned} \Phi(X_t) &= \Phi(X_0) + \int_0^t \frac{\partial \Phi(X_s)}{\partial X_s} f(s, \cdot) ds + \int_0^t \frac{\partial \Phi(X_s)}{\partial X_s} g(s, \cdot) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i(\cdot) dB_s^{(i)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 \Phi(X_s)}{\partial X_s^2} d\langle M \rangle_s. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Para poder calcular el término  $\frac{\partial^2 \Phi(X_s)}{\partial X_s^2} d\langle M \rangle_s$ , se necesita conocer el proceso creciente  $\langle M \rangle_t$  asociado a la martingala  $M_t = \int_0^t g(s, \cdot) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i(\cdot) dB_s^{(i)}$ .

Ya que  $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$  es una base ortonormal de  $L^2(S)$ , para determinar  $\langle M \rangle_t$ , es suficiente determinar,

$$\langle \langle M \rangle_t e_i, e_j \rangle \quad \text{para } i, j = 1, 2, \dots$$

$$\langle \langle M \rangle_t e_i, e_j \rangle = \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{ik}(s) \sigma_{jk}(s) ds \quad (2.9)$$

donde

$$\sigma_{ik}(s) = \lambda_k \int_S g(s, x) e_i(x) e_k(x) dx.$$

En efecto,

$$\langle e_i, M_t \rangle = \langle e_i, \int_0^t g(s, \cdot) \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k(\cdot) dB_s^{(k)} \rangle = \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{ik}(s) dB_s^{(k)}$$

dado que  $\{B_t^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$  son independientes, luego

$$\mathbb{E}(\langle e_i, M_t \rangle \langle e_j, M_t \rangle) = \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E} \sigma_{ik}(s) \sigma_{jk}(s) ds.$$

Además,

$$\langle e_i, M_t \rangle \langle e_j, M_t \rangle - \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{ik}(s) \sigma_{jk}(s) ds$$

es una martingala.

Si se considera  $\| M_t \|_H^2$ , se tiene,

$$\| M_t \|_H^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, M_t \rangle^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E} \left( \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{ik}(s) dB_s^{(k)} \right)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \mathbb{E} (\sigma_{ik}(s))^2 ds$$

Estas relaciones permiten ver que el proceso creciente  $\langle \langle M \rangle \rangle_t$ , asociado a la martingala

$$M_t = \int_0^t g(s, \cdot) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i(\cdot) dB_s^{(i)}$$

se determina por la relación (2.9).

Recordando que  $\frac{\partial^2 \Phi(X_s)}{\partial X_s^2}$  es la derivada segunda de Fréchet en el espacio  $L^2(S)$ , se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi(X_t)}{\partial X_t^2} d\langle \langle M \rangle \rangle_t &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{\partial^2 \Phi(X_t)}{\partial X_t^2} (e_i)(e_j) d\langle \langle M \rangle \rangle_t e_i, e_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{\partial^2 \Phi(X_t)}{\partial X_t^2} (e_i)(e_j) \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{ik}(t) \sigma_{jk}(t) dt \end{aligned}$$

Sustituyendo esta igualdad en (2.8), se obtiene,

$$\begin{aligned} \Phi(X_t) &= \Phi(X_0) + \int_0^t \frac{\partial \Phi(X_s)}{\partial X_s} f(s, \cdot) ds + \int_0^t \frac{\partial \Phi(X_s)}{\partial X_s} g(s, \cdot) \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i(\cdot) dB_s^{(i)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{\partial^2 \Phi(X_s)}{\partial X_s^2} (e_i)(e_j) \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{ik}(s) \sigma_{jk}(s) ds. \end{aligned}$$

---

## Capítulo 3

# Modelos Clásicos de la Dinámica de Poblaciones

“Un modelo poblacional es un sistema dinámico, compuesto por una o varias ecuaciones diferenciales, que buscan predecir la evolución temporal en el número de individuos (o su densidad espacial) para un conjunto de especies. Para ello se parte de unas determinadas condiciones iniciales y se asumen unas reglas que representan la interacción de las especies entre sí y su relación con el ecosistema o medio en que habitan, en términos de los recursos necesarios para la supervivencia.

En cualquier ecosistema existe un gran número de especies que compiten por los recursos necesariamente limitados, con el objetivo común de evitar la extinción. Esto hace que cada especie interactúe con todas las demás. Esta interacción puede tener distintos grados de intensidad, y puede ser beneficiosa para unas especies y perjudicial para otras. Por tanto, un modelo poblacional totalmente general debe tener en cuenta todas estas interdependencias, lo cual conduce a una formulación de extraordinaria complejidad, que en algunos casos puede quedar lejos del alcance de los métodos analíticos y computacionales actuales.

Por ello, resulta conveniente estudiar en primer lugar los modelos poblacionales con una única especie, es decir, aquellos en los que la especie estudiada no presenta interacciones fuertes con ninguna otra especie en particular del ecosistema. En otras

palabras, la especie objeto del estudio no experimenta una depredación significativa por parte de otras especies, ni su supervivencia está vinculada a la existencia de una o varias presas en particular, sino más bien a la abundancia o escasez en términos globales, de los recursos del ecosistema: alimento, energía, agua, luz, espacio entre otros. Un ejemplo claro de modelo poblacional de una sola especie es el relativo al ser humano, cuyos primeros intentos de modelización se remontan al economista inglés Thomas Malthus,<sup>17</sup> a Anales del siglo XVIII. En efecto, en la época actual el ser humano carece de depredadores naturales y su supervivencia no depende (al menos exclusivamente) de la existencia de presas, sino más bien de la abundancia o escasez de recursos en el ecosistema global terrestre”.

### 3.1. Modelo de Crecimiento Exponencial.

Para el modelo de crecimiento exponencial se considera que la población cambia solo de acuerdo a la tasa de mortalidad y natalidad de los individuos, no se consideran las inmigraciones ni emigraciones o el efecto del ambiente sobre las poblaciones, por lo cual es uno de los modelos de dinámica de poblaciones más simple.<sup>2</sup>

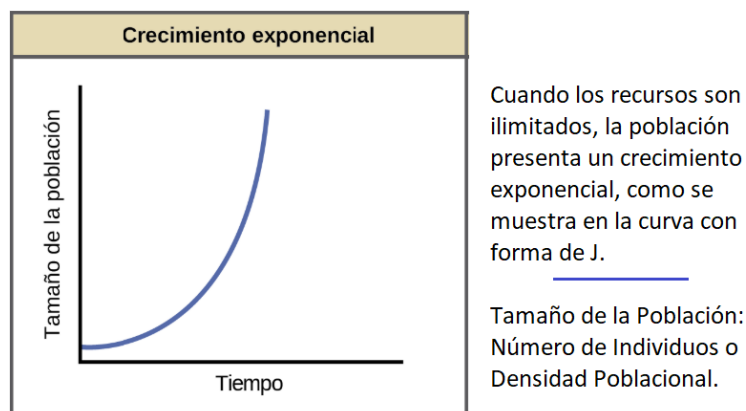
Sean  $n(t)$  y  $m(t)$  tasa de natalidad y mortalidad respectivamente, se tiene entonces que el cambio en la población está dado por,

$$\frac{dN}{dt} = (n(t) - m(t))N(t) \quad (3.1)$$

Dicha ecuación se completa incluyendo una condición inicial  $N(0) = N_0$ , la cual indica el número de individuos que hay en el momento en que se empieza a estudiar la población. Así al desarrollar la ecuación se obtiene una única solución la cual está dada por,

$$N(t) = N_0 e^{(n-m)t}$$

Este modelo indica un crecimiento; como el crecimiento de las bacterias, o bien decrecimiento, como es el caso de las sustancias radiactivas; lo cual depende de si  $n(t) - m(t)$  es mayor o menor que cero respectivamente.



### 3.2. Modelo de Crecimiento Logístico

“La *Capacidad de Carga*  $K$  es el máximo número de individuos que el ambiente puede mantener. La capacidad de carga es una propiedad conjunta de la población y del ambiente particular donde vive. En ocasiones, una población puede estar por encima de la capacidad de carga.<sup>21</sup> Cuando esto ocurre, la tasa de crecimiento es negativa (la mortalidad es mayor que la natalidad) y la población disminuye. A veces esto ocurre porque la capacidad de carga, en vez de permanecer constante, disminuye como consecuencia de cambios ambientales hasta hacerse menor que el tamaño de la población.

El estudio de la población de *Cervus elaphus* del Parque Nacional Yellowstone demostró que la capacidad de carga del parque para esta población varía con las lluvias.<sup>18</sup> En años lluviosos hay mucha producción de pasto y entonces la capacidad de carga es alta y la población de ciervos aumenta. Cuando un año seco sigue a uno o más años lluviosos, hay una menor producción de pasto que resulta en menor capacidad de carga. Como consecuencia del crecimiento ocurrido en años anteriores, la población está por encima de esa nueva capacidad de carga y en consecuencia disminuye.

Una segunda causa que puede determinar que la población esté por encima de la capacidad de carga es que ocurran inmigraciones. Otra razón para que una pobla-



ción esté por encima de la capacidad de carga es que su respuesta a la resistencia ambiental tenga un retardo. Esto ocurre típicamente en especies con generaciones discontinuas y especialmente con aquellas que tienen una muy alta tasa intrínseca de crecimiento, como por ejemplo las plantas anuales, muchos insectos y las bacterias. Las poblaciones de estas especies pueden crecer tanto en una sola generación que, a la siguiente, se encuentran por encima de la capacidad de sostenimiento y pueden colapsar. Esta dinámica resulta en fluctuaciones en el tamaño de la población.

En diversas poblaciones como es el caso de la población humana en una nación, o bien el caso de la mosca de la fruta en un recipiente cerrado, la tasa de natalidad disminuye conforme la población aumenta, lo cual puede explicarse por diferentes razones, ya sea por un cambio cultural o la limitación en los alimentos<sup>20</sup>.

El modelo más sencillo sobre crecimiento acotado supone que la tasa de crecimiento decae linealmente con la población, esto es,

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

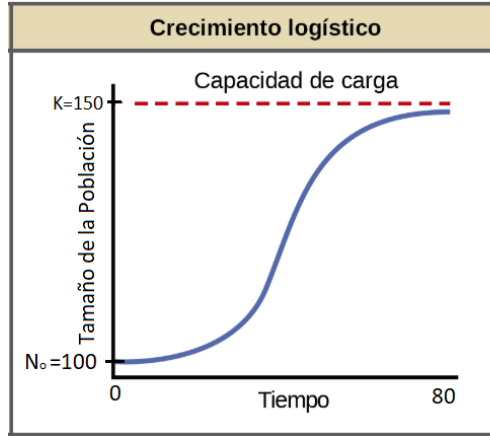
donde  $K$  determina la capacidad de carga del medio.

A la ecuación anterior se le denomina ecuación logística.<sup>21</sup> Este modelo tiene 2 equilibrios en  $N = 0$  y  $N = K$  donde para  $N = 0$  se tiene que la ecuación es linealmente inestable y en  $N = K$  es linealmente estable.

La solución del sistema logístico está dada por,

$$N(t) = \frac{N_0 K e^{rt}}{K + N_0(e^{rt} - 1)}$$

El gráfico muestra el modelo de crecimiento acotado con  $N_0 = 100$ ,  $r = 0,1$  y  $K = 150$ .



Cuando los recursos son limitados, la población presenta un crecimiento logístico; en este tipo de crecimiento la expansión de la población disminuye conforme los recursos se vuelven escasos y se nivela cuando se alcanza la capacidad de carga (o umbral) del ambiente. La curva del crecimiento logístico tiene forma de S.

### 3.3. Modelos Lotka-Volterra

#### 3.3.1. Competición

Consideremos dos especies biológicas que conviven en un mismo ambiente e interactúan compitiendo por los mismos recursos. En otros términos las dos especies tienen el mismo *Nicho Ecológico*<sup>24</sup> y la tasa de crecimiento de cada una depende de la presencia de la otra. Indiquemos por  $N_1(t)$  y  $N_2(t)$  el número de individuos de las dos especies y suponiendo que cada una de ellas, en ausencia de la otra, evolucionaría siguiendo el modelo logístico. Sean  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  los respectivos potenciales biológicos intrínsecos y  $K_1$ ,  $K_2$  las respectivas capacidades de carga. En el caso en que las dos especies están presentes, es necesario tener en cuenta el hecho que el potencial biológico de cada especie disminuye al crecer la densidad del competidor, esto lleva a adoptar la siguiente forma para el potencial biológico de las dos poblaciones,

$$\epsilon_1(N_1, N_2) := [\epsilon_1 - \gamma_1(h_1N_1 + h_2N_2)]$$

$$\epsilon_2(N_1, N_2) := [\epsilon_2 - \gamma_2(h_1N_1 + h_2N_2)]$$

donde  $\gamma_1$ ,  $h_1$ ,  $\gamma_2$  y  $h_2$  son constantes no negativas. Los parámetros  $h_1$ ,  $h_2$  pueden ser interpretados como una medida de la ocupación del nicho ecológico por parte de cada individuo de la especie, de forma que el término  $(h_1N_1 + h_2N_2)$  mide el grado compresivo de ocupación del nicho, cuando hay presentes  $N_1$  individuos de la primera

especie y  $N_2$  de la segunda. Además,  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  miden el efecto que dicha ocupación tiene sobre los potenciales biológicos de cada especie respectivamente.

Por lo tanto, de acuerdo a las hipótesis planteadas, el modelo para dos especies en competencia será descrito por el sistema

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}N_1(t) &= [\epsilon_1 - \gamma_1(h_1N_1 + h_2N_2)]N_1(t) \\ \frac{d}{dt}N_2(t) &= [\epsilon_2 - \gamma_2(h_1N_1 + h_2N_2)]N_2(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

que en el caso en que una de las especies esté ausente, el sistema para la especie presente se reduce a la ecuación logística de una especie.

### Análisis del Modelo

El sistema (3.2) tiene una única solución maximal  $(N_1(t), N_2(t))$  para la cual es posible demostrar la desigualdad

$$0 < N_i(t) \leq \max\{N_{0i}, K_i\} \quad i = 1, 2 \quad (3.3)$$

donde  $N_{0i}$  corresponde a la población inicial de la especie  $i$  y el  $K_i = \frac{\epsilon_i}{h_i\gamma_i}$  corresponde a la capacidad de carga de la especie  $i$  si se encuentra aislada.

Se puede comprobar fácilmente que las  $N_i$  tienen la siguiente forma,

$$N_i(t) = N_{0i} \exp\left(\int_0^t \epsilon_i(s) ds\right) > 0$$

y después, observando que  $N_1 > K_i$  implica que  $\frac{d}{dt}N_i(t) < 0$ , entonces se obtiene la desigualdad (3.3).

La desigualdad (3.3) implica que la solución del sistema (3.2) es global. Para examinar el comportamiento asintótico se observa que, eliminando en la ecuación el

término  $(h_1 N_1 + h_2 N_2)$  se obtiene,

$$\frac{d}{dt} \ln \left( \frac{N_1^{\gamma_2}}{N_2^{\gamma_1}} \right) = \epsilon_1 \gamma_2 - \epsilon_1 \gamma_1$$

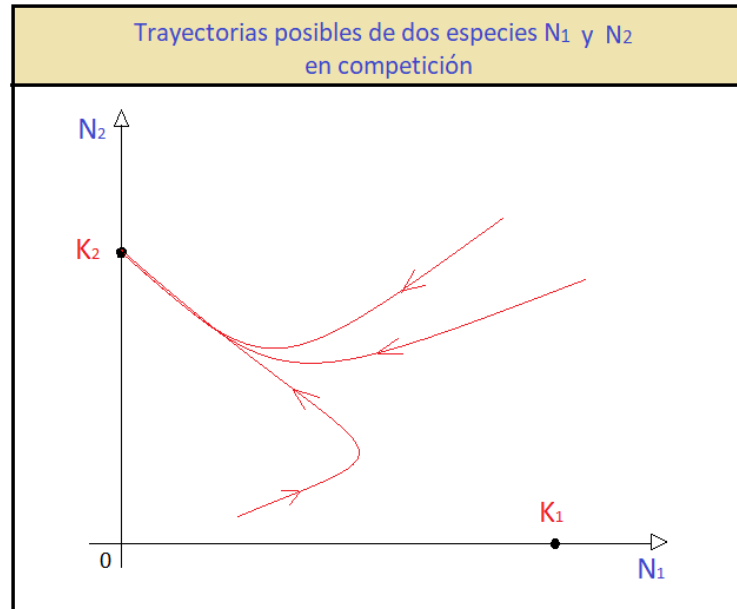
luego

$$\frac{N_1^{\gamma_2}}{N_2^{\gamma_1}} = e^{(\epsilon_1 \gamma_2 - \epsilon_1 \gamma_1)t}$$

Por lo tanto si  $\epsilon_1 \gamma_2 < \epsilon_1 \gamma_1$  se tendrá que  $N_1(t) \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow \infty$ .

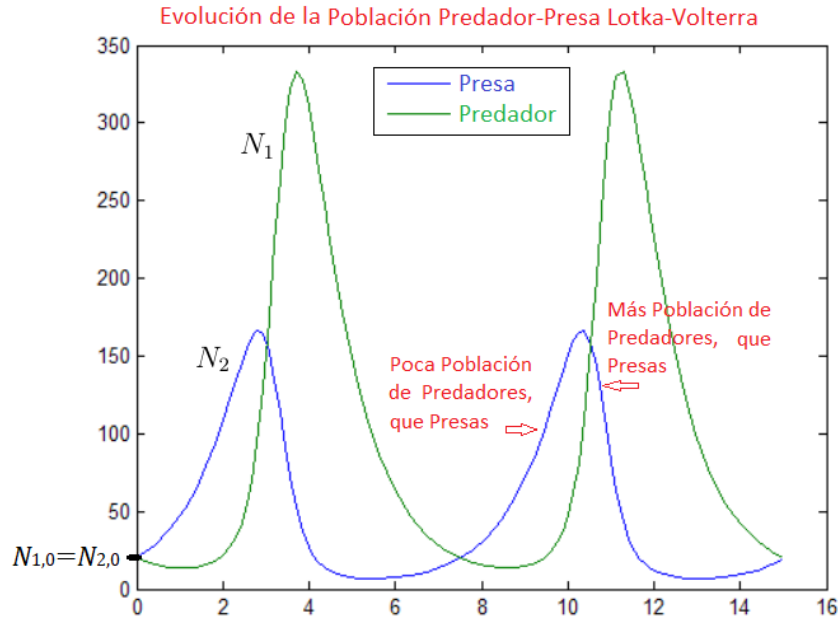
Un análisis más detallado muestra que  $N_2(t) \rightarrow K_2 = \frac{\epsilon_2}{\gamma_2 h_2}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Por lo tanto, el comportamiento asintótico está totalmente determinado y es independiente del dato inicial. El gráfico siguiente muestra tres posibles trayectorias en el caso  $\epsilon_1 \gamma_2 < \epsilon_1 \gamma_1$ .



### 3.3.2. Depredador-Presa

Uno de los primeros modelos para explicar esta interacción es el propuesto simultáneamente por Lotka y Volterra, a mediados de la década de 1920, el cual propone explicar la evolución de la población de una especie presa  $N_1$  y de una especie depredadora  $N_2$ . Las ecuaciones para la presa y para el depredador son las siguientes,<sup>21</sup>



$$\frac{dN_1}{dt} = (r_1 - \varepsilon N_2)N_1, \quad \frac{dN_2}{dt} = (-r_2 + \theta N_1)N_2$$

junto a las condiciones iniciales: “ $N_1(0) = N_{1,0}$  y  $N_2(0) = N_{2,0}$ ,” donde,

- $N_1$ : “densidad de la población de la presa”.
- $N_2$ : “densidad de la población del depredador”.
- $r_1$ : tasa de crecimiento de la presa.
- $r_2$ : tasa de crecimiento de los depredadores.
- $\varepsilon$ : habilidad de la presa para cumplir con su papel biológico.
- $\theta$ : habilidad del depredador para cumplir con su papel biológico.

Las ecuaciones propuestas por Lotka y Volterra se plantean, suponiendo que la

velocidad de variación de las poblaciones es conjuntamente proporcional a los ritmos intrínsecos de variación de depredadores-presas y la cantidad de población.

En ausencia de depredadores, la velocidad de variación del número de presas aumenta, de forma proporcional al número de presas, análogamente ocurre para los depredadores ya que en ausencia de presas su velocidad disminuye proporcionalmente al número de depredadores presentes.

### Modelo Depredador-Presa Modificado

Una de las primeras modificaciones al modelo propuesto por Lotka Volterra, fue realizada por Gause<sup>12</sup> incluyendo entre sus términos una función llamada defensa de grupo, la cual representa la capacidad de la presa para defenderse del depredador, ya sea actuando en un grupo mayor de individuos o bien camuflándose, este modelo está dado por las siguientes ecuaciones diferenciales<sup>19</sup>

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}N_1(t) = N_1f(N_1) - ag(N_1)N_2 \\ \frac{d}{dt}N_2(t) = bg(N_1)N_2 - cN_2 \end{cases}$$

donde,

$N_1(t)$  : representa la cantidad de presas.

$N_2(t)$  : representa la cantidad de depredadores.

$Nf(N)$  : representa el crecimiento natural de las presas.

$g(N)$  : representa la función de consumo de los depredadores.

Otra modificación del modelo de Lotka-Volterra viene dado por el modelo de tipo Leslie.<sup>19</sup>

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}N_1(t) = \alpha N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K}\right) - aN_1N_2 \\ \frac{d}{dt}N_2(t) = bN_2 \left(1 - \frac{N_2}{nN_1}\right) \end{cases}$$

En donde todas las constantes son positivas y se interpretan como sigue.

$\alpha$  : es la “tasa de crecimiento per cápita de las presas.”

$K$  : es la “capacidad de carga del medio.”

$a$  : es la “tasa de consumo de los depredadores”.

$b$  : es el “crecimiento per cápita de los depredadores”.

$n$  : es la “calidad de la cantidad de alimentos que favorece el nacimiento de depredadores”.

En el modelo depredador-presa se puede demostrar la existencia de soluciones periódicas.

### 3.4. Modelos Poblacionales con Difusión en el Espacio

En el estudio de los modelos poblacionales mucho se ha avanzado desde que T. Malthus en 1798 propusiera su modelo de dinámica de poblaciones bajo el supuesto: “la tasa per cápita de crecimiento de una población es directamente proporcional a su tamaño”; un primer ajuste a esta teoría fue dada por P. Verhulst en 1938, en la que se introduce el concepto de capacidad de carga, desde entonces, muchos han sido los modelos poblacionales que han ido apareciendo.

En cuanto a la dimensión del habitat, era más fácil considerar modelos bidimensionales o planares, para el caso de especies con movimiento en la tierra, posteriormente introduciendo más variables como el espacio y el tiempo del modelo, lo cual es relativamente reciente, se generaron una diversidad amplia de modelos que explican dinámicas poblacionales con técnicas más elaboradas como el uso de las ecuaciones diferenciales parciales, esto evidentemente dentro de los modelos continuos.

Para explicar la dinámica poblacional de una agrupación en estudio, los modelos matemáticos se han clasificado en 2:

1. Modelos discretos: En este modelo, el espacio es representado por variables independientes las cuales toman valores discretos, pudiendo ser implícitas o explícitas.

Los modelos discretos más usados son:

- a. “Parches, islas, metapoblaciones.”
- b. “Autómatas celulares.”
- c. “Mapeos acoplados.”

2. Modelos continuos: En este modelo, el espacio y tiempo toman valores continuos y la variable poblacional es dada como densidad poblacional, debido a que éstas serán las variables de un modelo descrito en ecuaciones diferenciales parciales. Existen dos procedimientos para la deducción de un modelo que gobierne el movimiento de un grupo poblacional<sup>20</sup> en un determinado medio y son:

- a. Caminatas randómicas.
- b. Analogía con el medio continuo.

En este estudio consideraremos el procedimiento: Analogía con el medio continuo, con éste deduciremos el modelo matemático que gobierna el movimiento del grupo poblacional en cuestión, para tal se establece a grosso modo que este movimiento poblacional, se comporta como el movimiento de un fluido, esta suposición es bastante aceptada y se considera el punto de partida para la deducción del modelo físico-matemático.

Sea  $\Omega$  un hábitat en  $\mathbb{R}^2$ , empecemos considerando una única población y su parte solo difusiva. Sea  $u(\vec{r}, t)$  la densidad poblacional definida en  $\vec{r} = (x, y)$  y en el tiempo  $t$ . Entonces

$$\int_{\Omega} u(\vec{r}, t) d\Omega$$

corresponde a la población total sobre la región  $\Omega$  en el tiempo  $t$ , en consecuencia,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(\vec{r}, t) d\Omega$$

corresponde a la velocidad instantánea de cambio de la población total. Tal cambio es debido solo al flujo a través de  $\Omega$  frontera.

Sea: “ $\vec{J} = (J_1, J_2)$  el flujo en el punto  $\vec{r}$  de la frontera,  $\partial\Omega$ , de  $\Omega$  y  $\vec{n}$  el vector normal exterior en dicho punto”, se tiene,

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{r}, t) d\Omega = - \int_{\partial\Omega} \vec{J} \cdot \vec{n} ds \quad (3.4)$$



donde el signo menos que aparece al lado derecho, hace explícita la convención: si el ángulo entre  $\vec{J}$  y  $\vec{n}$  es menor a  $\frac{\pi}{2}$ , el producto escalar  $\vec{J} \cdot \vec{n}$  es positivo y entonces el término de la derecha es negativo, hecho que se interpreta como que el flujo es hacia afuera; mientras si el ángulo entre  $\vec{J}$  y  $\vec{n}$  es mayor que  $\frac{\pi}{2}$  entonces dicho producto escalar es negativo y en ese caso, el término de la derecha es positivo lo que significa que el flujo es hacia adentro de la región  $\Omega$ . Al usar el Teorema de Gauss, la igualdad (3.4) se transforma en

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{r}, t) - \nabla \cdot \vec{J} \right) d\Omega = 0$$

Para lograr que esta igualdad se verifique para toda subregión de  $\Omega$  se deberá imponer lo siguiente,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\vec{r}, t) = \nabla \cdot \vec{J} \quad (3.5)$$

la que se denomina “*ecuación de continuidad o ley de conservación*”. La forma explícita del flujo  $\vec{J}$  da origen a diversos modelos difusivos. Si se asume la “*Ley de Fick*”<sup>6</sup>, que dice: “El flujo de una sustancia en el punto  $\vec{r}$  al tiempo  $t$  es directamente proporcional a menos el gradiente de la concentración de la sustancia en dicho punto en ese instante”, el flujo poblacional se puede escribir de la siguiente forma,

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = -D\nabla u(\vec{r}, t) \quad \text{donde } D > 0 \quad (3.6)$$

Sustituyendo la ecuación (3.6) en la ecuación (3.5) se obtiene el fenómeno estrictamente difusivo, determinado por la siguiente ecuación diferencial,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\nabla \cdot \nabla u = D\Delta u \quad (3.7)$$

donde: “ $\Delta u$  es el operador Laplaciano de la densidad de población  $u$ ”.

Cuando al proceso exclusivamente difusivo, se le incorpora “procesos de nacimiento y muerte que sean dependientes de la densidad poblacional, entonces la ecuación

tomará la forma de una ecuación de reacción-difusión<sup>7</sup>, es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \nabla \cdot \nabla u = D \Delta u + f(u), \quad \forall (\vec{r}, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ \quad (3.8)$$

donde la función  $f$  representa la tasa neta de cambio de la población.

La información necesaria para el completo estudio de la ecuación (3.8) lo proporcionan “las condiciones iniciales y de frontera”. Las cuales entregan la distribución de la población en la región  $\Omega$  en un instante inicial de tiempo y las interacciones de ésta con la frontera de  $\Omega$  para todo tiempo.

### 3.4.1. Un Modelo Mutualista en Ecología

Es bien conocido que existen muchos estudios de dinámica de poblaciones en lo referente a las interacciones de depredación o de competencia. Sobre mutualismo entre dos o más especies se ha estudiado relativamente poco; un estudio pionero al respecto fue escrito por Boucher<sup>5</sup> en éste se señala que: “el resultado demográfico de una relación mutualista es que cada una de las respectivas tasas netas de cambio de las poblaciones, es mayor si hay interacción que si no la hay. Atendiendo a distintos criterios como el tipo de beneficios recibidos, el grado de especificidad o el nivel de dependencia de la interacción, las relaciones mutualistas suelen clasificarse. Uno de los trabajos pioneros en los que se dedujo y estudió parte de la dinámica temporal de un modelo para agente biótico-planta (aquí se llamará según el caso, a un agente biótico como polinizador, en particular), con respuesta funcional de Holling de tipo II, fue el escrito por Soberón y Martínez del Río<sup>26</sup>”. “La introducción de una respuesta funcional de tipo IV en estos modelos es relativamente reciente. En lo que sigue, se llamarán vectores de polinización a los agentes transportadores del polen, los cuales se clasifican en agentes bióticos, como las aves, insectos, etc; y abióticos como el viento, la lluvia, etc. Existe una gran diversidad de vectores o agentes bióticos, entre ellos se encuentran los himenópteros, lepidópteros y dípteros, así como colibríes, algunos murciélagos y en casos raros algunos ratones, monos y porongas”. Para el estudio del sistema matemático de esta sección, se consideran las siguientes premisas:

1. “El agente biótico, aunque se alimenta del néctar de las plantas, también tiene otra fuente de recursos los cuales son limitados. Esto significa que la población de agentes bióticos, aunque la interacción con las plantas les es benéfica, no es vital para ellos.”
2. “Las plantas son polinizadas exclusivamente por esta población de agentes bióticos. Esto nos indica que la población de plantas es altamente especializada por lo que la interacción con los agentes bióticos no sólo la beneficia sino que le es vital”.
3. “La interacción agente biótico-planta la describe la respuesta funcional de Holling de tipo IV. El significado de ésta es el siguiente. La razón de visitas de agentes bióticos a plantas, por unidad de agente biótico, crece a bajas densidades de la población de plantas hasta alcanzar su máximo, después del cual, disminuye. Esto corresponde a una situación en la que los agentes bióticos llegan a un estado de saciedad tal que inmediatamente después la razón de consumo de néctar por unidad de agente biótico, decrece. A nivel individual, los agentes bióticos se mueven al azar lo cual, como se explicó anteriormente, significa que el flujo se da en dirección de menos el gradiente de la densidad poblacional.

Sean  $u(x; y; t)$  y  $v(x; y; t)$  la densidad poblacional de los agentes bióticos y de la planta en la posición  $(x; y)$  del habitat (cuya forma se supondrá es rectangular) al tiempo  $t$ , respectivamente. El modelo matemático que incorpora las premisas listadas anteriormente y que por tanto, da la dinámica espacio-temporal de una interacción agente biótico-planta es el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales”,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= D_1 \nabla^2 u + bu(K - u) + \frac{k_2 \sigma \mu^2 u v e^{-cv}}{1 + \sigma \varphi \mu^2 v} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{k_1 \sigma \mu u v e^{-cv}}{1 + \sigma \varphi \mu^2 v} - \gamma v\end{aligned}\tag{3.9}$$

donde “el término  $D_1 \nabla^2 u$  representa la parte difusiva; todos los parámetros que aparecen en (3.9), además de ser positivos, tienen una importante interpretación ecológica:  $b$  es la tasa intrínseca de crecimiento del agente biótico,  $k_1$  es el número de óvulos fertilizados por cada visita de un agente biótico a una planta,  $k_2$  es una constante energética,  $\sigma$  es la probabilidad de encuentros,  $\mu$  es la recompensa energética,  $\varphi$  es la velocidad de extracción del néctar,  $\gamma$  es la tasa de mortalidad de la planta y  $K$

es la capacidad de carga del medio. En [8] se dan más detalles sobre la interpretación de los parámetros. La función,

$$\frac{k_2 \sigma \mu^2 u v e^{-cv}}{1 + \sigma \varphi \mu^2 v}$$

al ser dividida entre  $u$ , captura las propiedades cualitativas que caracterizan a la respuesta funcional de Holling tipo IV. Aunado al sistema de reacción-difusión (3.9), debemos agregar las condiciones iniciales y de frontera que completan el problema matemático por estudiar”.

Para ello, primero se define la región (el habitat) de interés, i.e.,

$$R = \{f(x; y) : 0 < x < a; 0 < y < b\}$$

donde  $a$  y  $b$  son dos números positivos. Las condiciones iniciales son

$$u(x; y; 0) = u_0(x; y) \quad y \quad v(x; y; 0) = v_0(x; y) \quad \forall (x; y) \in R. \quad (3.10)$$

las de frontera son de tipo Neumann homogéneas, es decir,

$$\nabla u \cdot n = 0 \quad y \quad \nabla v \cdot n = 0 \quad \forall (x; y) \in \partial R \quad y \quad \forall t > 0 \quad (3.11)$$

donde  $n$  es el vector normal exterior a la frontera  $\partial R$  del rectángulo  $R$ .

Para realizar este estudio del modelo agente-biótico-planta dado en (3.9) se le dividirá en dos partes:

Parte 1. Se considera la dinámica espacio-temporal expresada por el sistema de ecuaciones en derivadas parciales dado en (3.9).

Parte 2. Se considera la dinámica temporal expresada por el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, esto es, sin considerar el término de difusión del sistema (3.9), a saber,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= bu(K - u) + \frac{k_2 \sigma \mu^2 u v e^{-cv}}{1 + \sigma \varphi \mu^2 v} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{k_1 \sigma \mu u v e^{-cv}}{1 + \sigma \varphi \mu^2 v} - \gamma v \end{aligned} \quad (3.12)$$

Análisis de la Parte 2.

El objetivo de esta parte 2 se enfoca en conocer el comportamiento cualitativo de las soluciones. Para tal se calcula primero los puntos de equilibrio que son las intersecciones de las ceroclinas del sistema:

$$uF(u;v) = 0 \quad \text{y} \quad vG(u;v) = 0 \quad (3.13)$$

donde

$$F = b(K - u) + \frac{k_2 \sigma \mu^2 v e^{-cv}}{1 + \sigma \varphi \mu^2 v} \quad (3.14)$$

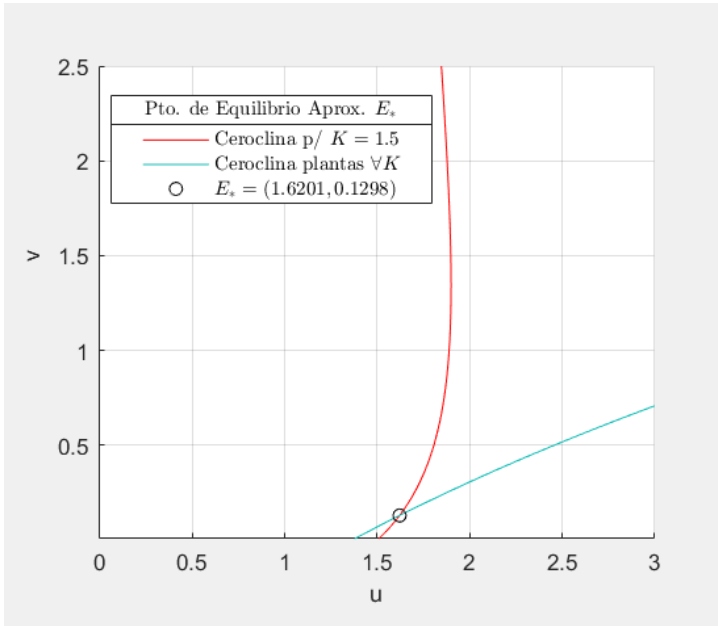
$$G = \frac{k_1 \sigma \mu v e^{-cv}}{1 + \sigma \varphi \mu^2 v} - \gamma$$

resolviendo se obtienen los puntos de equilibrio:

$$E_0 = (0; 0), \quad E_K = (K; 0)$$

quedando por resolver:

$$F = 0, \quad G = 0 \quad (3.15)$$



de este sistema, dependiendo de los valores dados para  $K$  y para ciertos valores de los parámetros y con la condición

$$K > \frac{\gamma}{k_1 \mu \sigma}$$

se obtiene numéricamente, ver (Apéndice A), un tercer y único punto de equilibrio, denotado como  $E_*$  como se observa en el gráfico adjunto.

En efecto, considerando

$K = 1.5$ , y escogiendo los

los siguientes valores para los parámetros, (salvo indicación expresa se considerarán

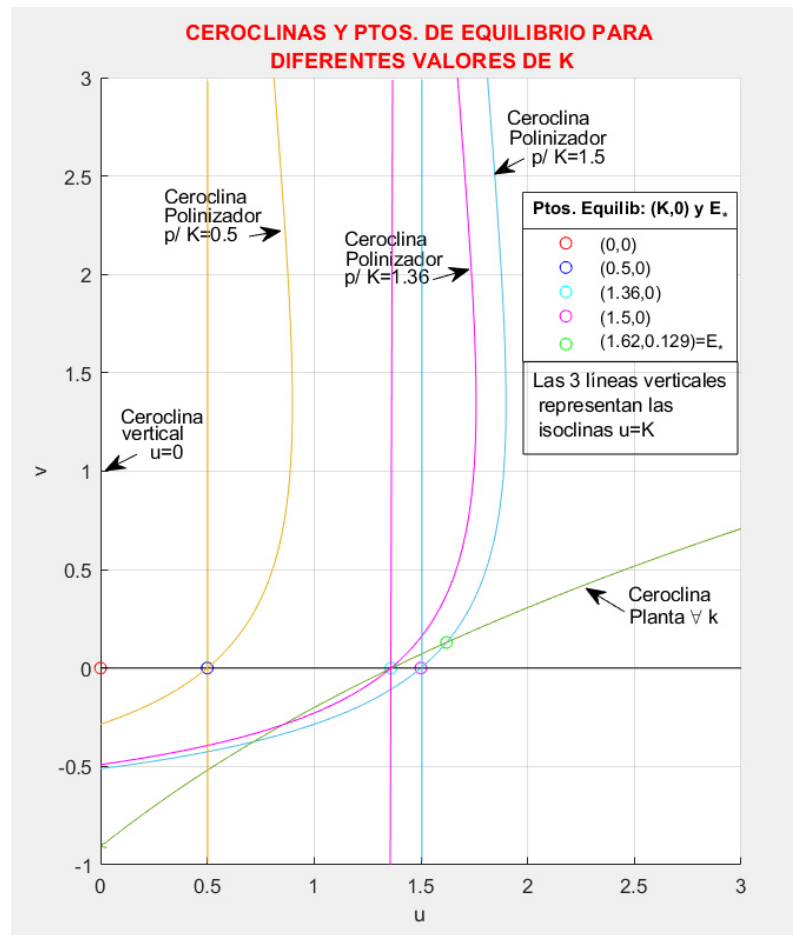
éstos en el decorrer del trabajo):

$$b = 1, k_1 = 2, k_2 = 2, \sigma = 2,2, \mu = 0,5, \phi = 2, \gamma = 3, c = 0,3$$

se obtuvo una ceroclina agente biótico (o en particular polinizador) que depende de  $K$ , la cual intersectando con la ceroclina planta (que no depende de  $K$ ) se encontró el punto de equilibrio  $E_*= (1.6201, 0.1298)$ .

Para el valor  $K = \frac{\gamma}{k_1\mu\sigma}$  el punto de intersección se da en  $(K, 0)$  no se da un equilibrio no trivial.

De la ecuación (3.15) al no encontrarse solución cuando  $K < \frac{\gamma}{k_1\mu\sigma}$  no existen puntos de equilibrio, como puede verse en el siguiente gráfico para  $K = 0.5$  donde claramente no hay intersección con la ceroclina planta.



Considerando el Teorema de Hartman-Grobman (1.2), el análisis cualitativo del sistema (3.12) en forma local, parte considerando su sistema lineal asociado en cada punto de equilibrio hallado, (sin tomar en cuenta los puntos no hiperbólicos (??)), para tal se re-escribe el sistema (3.13) como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= f(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= g(u, v)\end{aligned}$$

Sea  $U = (u, v)$ ,  $U' = (\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt})$  y el campo vectorial  $h(u, v) = (f(u, v), g(u, v))$ , ahora calculando:

$U' = Jh(U).U$ , donde  $Jh$  es la matriz Jacobiana del campo vectorial  $h$ , se tiene,

$$U'(u, v) = \begin{pmatrix} b(K - 2u) + \frac{a_3 v e^{-cv}}{1 + a_2 v} & -\frac{a_3 u e^{-cv}(ca_2 v^2 + cv - 1)}{(1 + a_2 v)^2} \\ \frac{a_1 v e^{-cv}}{1 + a_2 v} & -\frac{a_1 u e^{-cv}(ca_2 v^2 + cv - 1)}{(1 + a_2 v)^2} - \gamma \end{pmatrix} \cdot U(u, v)$$

el cual viene a ser el sistema lineal asociado, donde  $a_1 = k_1 \sigma \mu$ ,  $a_2 = \sigma \varphi \mu^2$  y  $a_3 = k_2 \sigma \mu^2$ .

Ahora calculando  $J(u; v)$  en  $E_0$  y  $E_K$  se tiene,

$$(a) \quad J(E_0) = \begin{pmatrix} bK & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} \quad y \quad (b) \quad J(E_k) = \begin{pmatrix} -bK & a_3 K \\ 0 & a_1 K - \gamma \end{pmatrix}$$

Observando ambas matrices, podría ocurrir que al variar el parámetro  $K$  los puntos de equilibrio del sistema aparezcan o desaparezcan, se estabilicen o desestabilicen o cambien de tipo y, en consecuencia el comportamiento cualitativo del sistema (su diagrama de fase) cambie notablemente, en especial en el caso (b), como se verá después de analizar el caso (a).

Para el caso (a), calculando los autovalores de  $J(E_0)$  :  $\lambda_1 = bK$  y  $\lambda_2 = \gamma$ , siendo  $\gamma, b$  y  $K$  reales,  $E_0$  es en efecto un punto de equilibrio hiperbólico, y siendo los autovalores de diferente signo, se concluye, (ver tabla):

$E_0 = (0, 0)$  es un punto de silla inestable.

Para el caso (b), calculando los autovalores de  $J(E_K)$  :  $\lambda_1 = -bK$  y  $\lambda_2 = a_1K - \gamma = k_1\sigma\mu K - \gamma$ .

En  $\lambda_2$ , si se considera  $K = \frac{\gamma}{k_1\sigma\mu}$  entonces  $\lambda_2 = 0$ , siendo así los autovalores, se concluye:

$E_K = (0, K)$  para  $K = \frac{\gamma}{k_1\sigma\mu}$  es un punto de equilibrio no hiperbólico.

En este caso el análisis según Hartman-Grobman es inconclusivo y tan solo no se tendra un equilibrio no trivial.

En  $\lambda_1 = \lambda_2$  equivalentemente  $-bK = a_1K - \gamma \Rightarrow K = \frac{\gamma}{a_1 + b} < \frac{\gamma}{a_1}$  entonces para  $K < \frac{\gamma}{k_1\sigma\mu}$ , se tiene que  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ , siendo así los autovalores, se concluye:

$E_K = (0, K)$  para  $K < \frac{\gamma}{k_1\sigma\mu}$  es un nodo asintóticamente estable.

En  $\lambda_1 = -\lambda_2$  equivalentemente  $-bK = -a_1K + \gamma \Rightarrow a_1 > (a_1 - b)K = \gamma \Rightarrow K > \frac{\gamma}{k_1\sigma\mu}$  entonces para  $K > \frac{\gamma}{k_1\sigma\mu}$ , se tiene que  $\lambda_1 < 0$  y  $\lambda_2 > 0$ , siendo así los autovalores, se concluye:

$E_K = (0, K)$  para  $K > \frac{\gamma}{k_1\sigma\mu}$  es un punto de silla inestable.

Es de importancia tener conclusiones de esta dinámica para regiones grandes, se verá esto a seguir:

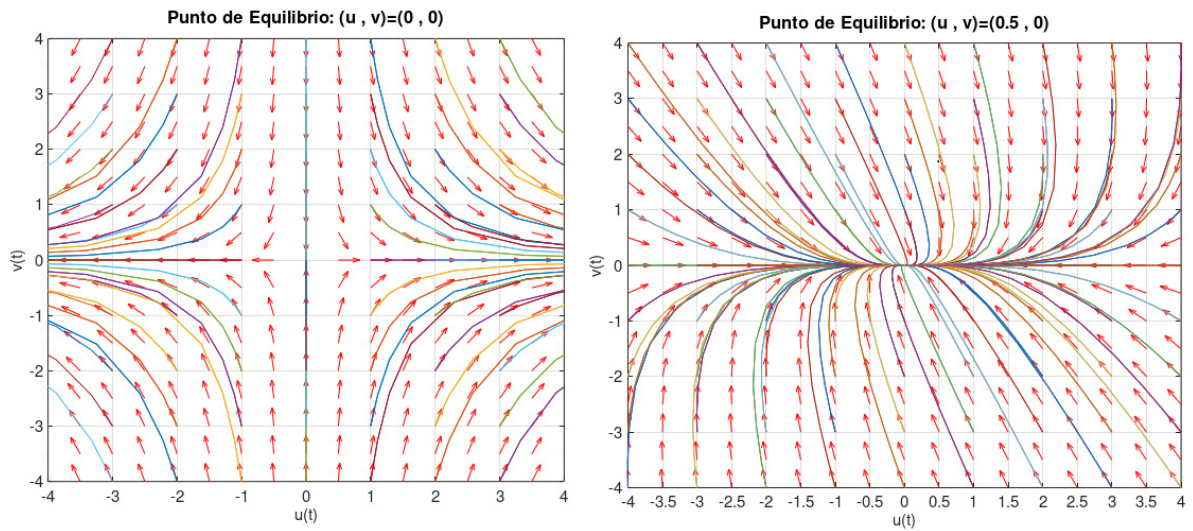
- Si el único punto de equilibrio  $E_K$  es el único diferente al trivial; entonces éste es atractor de todas las órbitas de (3.12) que inician en el primer cuadrante, siendo esto así se puede interpretar que ambas poblaciones no cohabitan, entendiéndose que la población de agentes bióticos saturan su capacidad  $K$  de

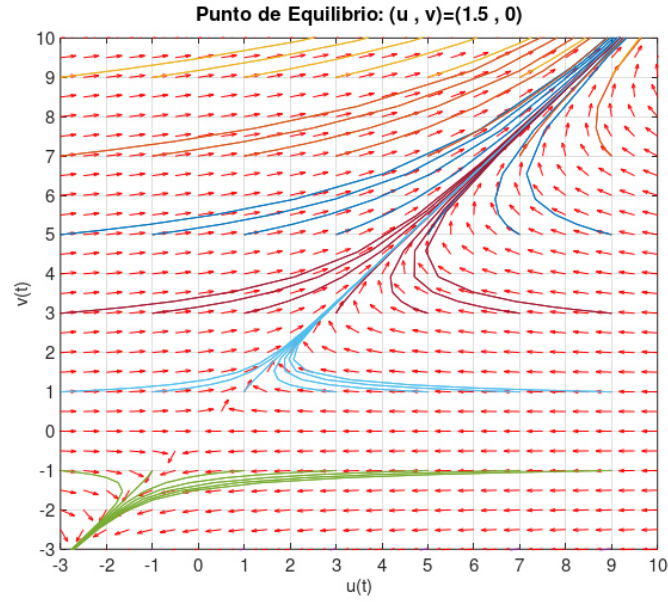


carga para tiempos grandes en cuanto que las plantas tienden a extinguirse.

- Si siendo  $E_K$  punto de silla, existe en el primer cuadrante un otro punto de equilibrio, atractor de toda órbita que inicie en cualquier condición inicial contenida en  $\mathbb{R}^2$ . “En particular, una rama de la variedad inestable,  $W^u(E_K)$  del sistema (3.12) en  $E_K$ , es trayectoria heteroclínica que conecta a éste con  $(u^*, v^*)$ .” En este punto de intersección  $(u^*, v^*)$  se puede afirmar que ambas poblaciones cohabitan vía un atractor global, pudiendo ser un factor para la estabilidad del sistema el hecho de haber un crecimiento suf. grande de la variable  $\mu$  de recompensa energética.

Finalmente, de todo lo estudiado, los resultados obtenidos se pueden sintetizar en los siguientes diagramas de fase, construídos con los valores de los parámetros antes mencionados y con sentido para las variables, como siendo  $u$  y  $v$  positivas:

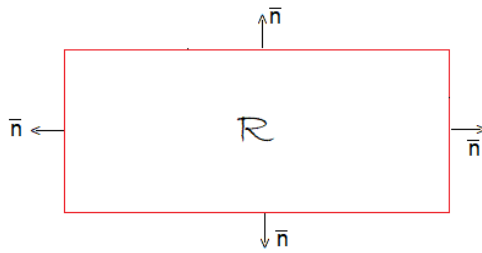




Análisis de la Parte 1.

El desarrollo de esta Parte 1 se enfoca en el análisis numérico, en cuanto a la estabilidad del sistema de reacción-difusión siguiente,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= D_1 \nabla^2 u + bu(K - u) + \frac{k_2 \sigma \mu^2 u v e^{-cv}}{1 + \sigma \phi \mu^2 v} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{k_1 \sigma \mu u v e^{-cv}}{1 + \sigma \phi \mu^2 v} - \gamma v\end{aligned}\quad (3.16)$$



Condiciones de Frontera:

$$\nabla u \cdot \bar{n} = 0 \quad \nabla v \cdot \bar{n} = 0$$

Condiciones Iniciales:

$$(u(x, y, 0), v(x, y, 0)) = (u_0, v_0)$$

Las condiciones de frontera nos dice que las densidades de polinizadores y plantas se mantienen constantes en la frontera.

Este análisis comienza por observar que los puntos de equilibrio del sistema de reacción dado en (3.12), hallados anteriormente, vienen a ser soluciones estacionarias y homogéneas del sistema dado en (3.16), ahora, si tomamos como condiciones ini-

ciales tales puntos de equilibrio tendríamos soluciones triviales para el sistema de reacción difusión; veremos más adelante, en los resultados numéricos que al tomar las condiciones iniciales como pequeñas perturbaciones de los puntos de equilibrio  $(\hat{u}, \hat{v})$ , obtenemos que las soluciones de nuestro sistema (3.16), se estabilicen en los referidos puntos de equilibrio tomados.

Consideremos las siguientes perturbaciones, donde  $(\hat{u}, \hat{v})$  son los sucesivos puntos de equilibrio del sistema (3.12),

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= \hat{u}(1 + 0.1\text{sen}(2y)) \\ v(x, y, 0) &= \hat{v}(1 + 0.1\text{cos}(2y)) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Para resolver numéricamente (3.16), usemos los valores de los parámetros del sistema mencionados anteriormente, además considere  $K = 0.5$ ,  $D_1 = 3$ , sustituyendo en (3.16) se tiene,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= 3\nabla^2 u + u(0.5 - u) + \frac{1.1uve^{-0.3v}}{1 + 1.1v} \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{2.2uve^{-0.3v}}{1 + 1.1v} - 3v \end{aligned}$$

La condición de frontera sigue siendo la de Neumann, la condición inicial la tomamos considerando  $(\hat{u}, \hat{v}) = (K, 0)$  en (3.17).

Ahora, es evidente que haciendo variar los parámetros escogidos así como los valores para  $K$ , se llegan a las correspondientes soluciones aproximadas, para tal se ha escogido un programa que nos exhiban estas soluciones las cuales nos refleja el comportamiento de las variables  $u$  y  $v$ , esto es, la distribución en el espacio de las poblaciones de los agentes bióticos y de las plantas en distintos valores del tiempo. El software usado para resolver esta EDP, es el FlexPDE, el cual se basa en la técnica de los elementos finitos, éste nos muestra gráficamente, a seguir, el comportamiento de las soluciones.

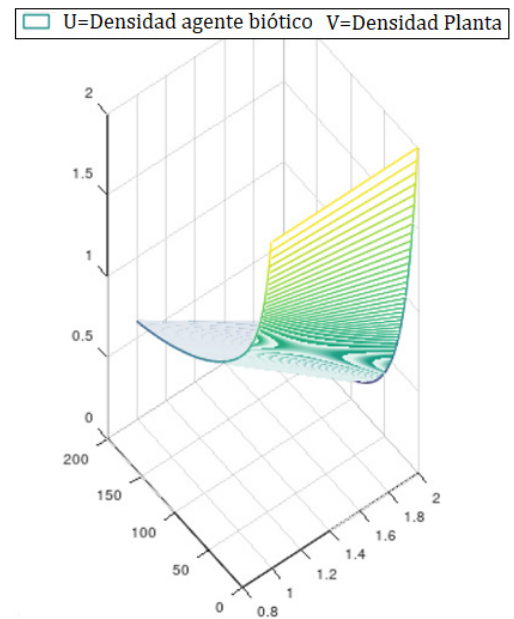
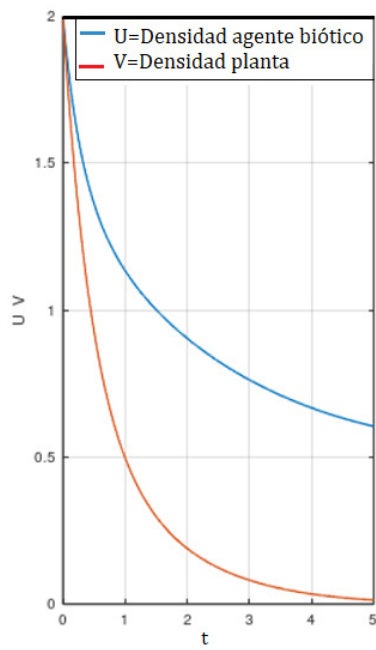


Fig. 1

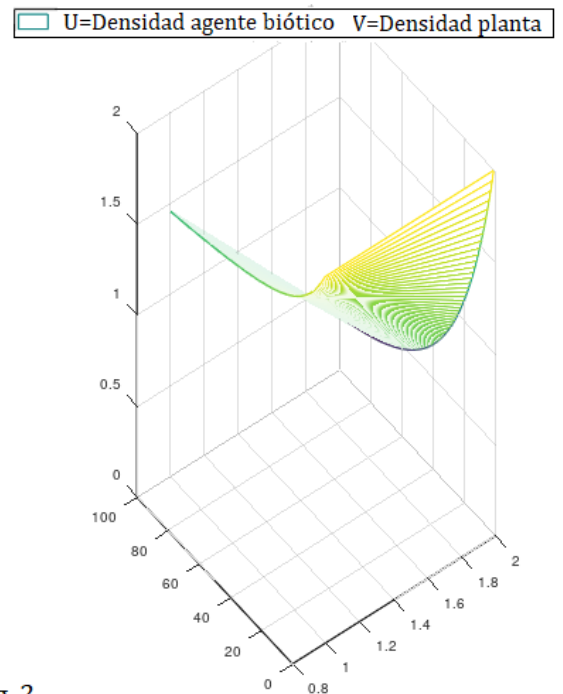
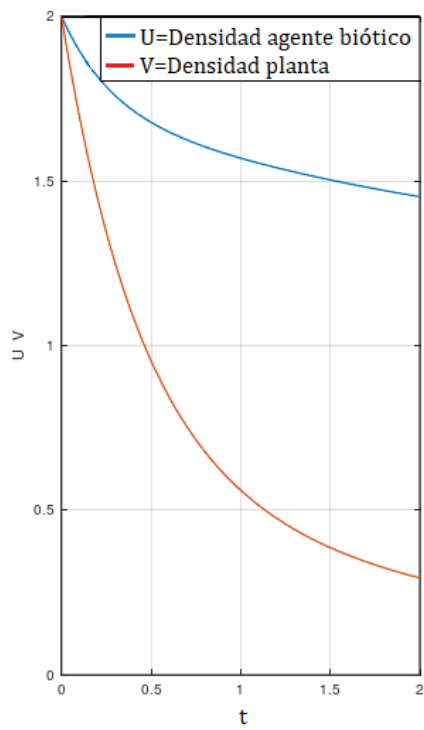


Fig. 2

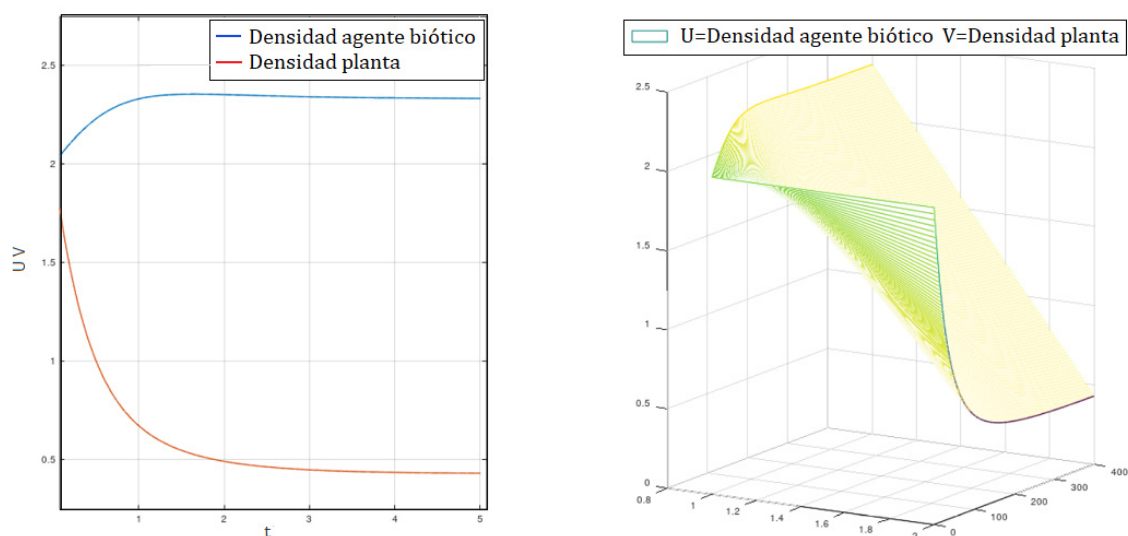


Fig. 3

De los gráficos 1 y 2 se observa que la solución tiende, a través del tiempo, a “la solución estacionaria-homogénea  $(u(x, y, t), v(x, y, t)) = (\hat{u}, \hat{v})$ ” y se observa que para tiempos suf. grandes, la solución se estabiliza en  $(\hat{u}, \hat{v})$ .

Lo que significa que la población del agente biótico se estabiliza llegando a su capacidad de carga  $K$ ; en cuanto a la población de plantas ésta deja de existir gradualmente, para el caso dado. En el gráfico 3, se observa una rápida extinción de plantas, en cuanto que el agente biótico sigue existiendo, esto demuestra que esta interacción a las plantas les es vital, mientras que al agente biótico posee otra fuente de recursos que le permite la existencia sin las plantas.

---

## Capítulo 4

# Dinámica Estocástica de Poblaciones

Factores medioambientales, como temperatura, humedad, luz, entre otros y factores biológicos determinan la diferencia que hay en la distribución espacial de las poblaciones, de un habitat a otro. En Ecología<sup>24</sup> (rama de la Biología que estudia las interacciones de los seres vivos con su hábitat), interesa estudiar la distribución y abundancia de las poblaciones. La Ecología para dar respuesta a las interrogantes que surgen del estudio de la dinámica de poblaciones, utiliza como herramienta la Estadística y el Modelamiento Matemático.

En los modelos de dinámica de poblaciones se presentan dos tipos de estocasticidad:<sup>9</sup>

- Demográfica: Cambios en la relación de mortalidad y natalidad en una población debidos al azar o efectos esporádicos (no correlacionados) de la dinámica poblacional.
- Ambiental: Variaciones imprevisibles de las condiciones ambientales.

Se debe recordar que el tamaño de una población a considerar es una cantidad estadística, mientras que la cantidad que las ecuaciones diferenciales puedan determinar es una aproximación conveniente para el cálculo, pero inexacta con respecto a la población real. Para investigar la dinámica de poblaciones teniendo en cuenta las

variaciones que las ecuaciones diferenciales ordinarias no pueden calcular, uno de los métodos útiles, como es fácil imaginar, es la utilización de conceptos de probabilidad.

En efecto, varios investigadores tuvieron la idea de introducir conceptos de probabilidad en la investigación sobre las variaciones de poblaciones, como por ejemplo en [11] y [14]. Para formular el desarrollo de poblaciones teniendo en cuenta los aspectos probabilísticos, es útil introducir la noción de perturbación estocástica. Si se examina de manera más precisa el origen de la perturbación estocástica, se pueden individualizar dos tipos de perturbaciones estocásticas: estocasticidad demográfica y estocasticidad ambiental, como se discuten en los trabajos de los autores anteriormente citados.

## 4.1. Estocasticidad Demográfica

La estocasticidad demográfica, se puede decir, es la aleatoriedad debida a la aproximación probabilística del número de individuos por números reales,

es decir pasaje desde el discreto al continuo. Considere “ $N(t)$  el número de individuos de una cierta especie  $s$  en el instante  $t$ ” y por  $dN(t)$  su incremento durante un intervalo de tiempo  $[t, t + \Delta t]$ . “El incremento  $dN(t)$  del número de individuos durante el intervalo  $[t, t + \Delta t]$ ” no puede ser otro que la diferencia del número de individuos nacidos y del de individuos muertos durante el intervalo  $[t, t + \Delta t]$ . Por eso, indicando por  $n(t, t + \Delta t)$  y  $m(t, t + \Delta t)$  el número de individuos nacidos y el de individuos muertos respectivamente, se tiene,

$$dN(t) = n(t, t + \Delta t) - m(t, t + \Delta t) \quad (4.1)$$

Para un intervalo  $[t, t + \Delta t]$  suficientemente pequeño en el cual se pueden despreciar las posibles variaciones de las condiciones que determinan el índice de natalidad y el de mortalidad, el número de individuos nacidos  $n(t, t + \Delta t)$  y el de individuos muertos  $m(t, t + \Delta t)$  podrían representarse por la aproximación

$$n(t, t + \Delta t) \approx \nu N(t) \Delta t, \quad m(t, t + \Delta t) \approx \mu N(t) \Delta t \quad (4.2)$$

donde  $\nu$  y  $\mu$  son el índice de natalidad y mortalidad respectivamente, por unidad de tiempo y por un individuo.

En (4.2) se podría sustituir  $\nu N(t)\Delta t$  y  $\mu N(t)\Delta t$  por dos variables aleatorias  $A_{(N(t)\Delta t)}$  y  $Z_{(N(t)\Delta t)}$  a valores en  $\mathbb{N}$  de manera que la esperanza matemática de

$$\mathbb{E}[A_{(N(t)\Delta t)}] = \nu N(t)\Delta t, \quad \mathbb{E}[Z_{(N(t)\Delta t)}] = \mu N(t)\Delta t$$

Por  $A_{(N(t)\Delta t)}$  se quiere indicar el número de hijos e hijas que la comunidad, de  $N(t)$  individuos de esta especie, reproduce durante el tiempo  $\Delta t$ , mientras que por  $Z_{(N(t)\Delta t)}$  el número de muertos que la misma comunidad registra durante el tiempo  $\Delta t$ . En este contexto es razonable suponer que una muerte o un nacimiento sea independiente de otra muerte u otro nacimiento. En esta hipótesis, se puede establecer la ley de la variable aleatoria  $A_{(N(t)\Delta t)}$  y la de  $Z_{(N(t)\Delta t)}$  mediante la aproximación por la ley de Poisson con el parámetro

$$\nu N(t)\Delta t = \mathbb{E}A_{(N(t)\Delta t)} \text{ y } \mu N(t)\Delta t = \mathbb{E}Z_{(N(t)\Delta t)}$$

respectivamente. Es decir, la ley de  $A_{(N(t)\Delta t)}$  y la de  $Z_{(N(t)\Delta t)}$  están dadas por

$$\mathbb{P}(\{A_{(N(t)\Delta t)} = k\}) = e^{-\nu N(t)\Delta t} \frac{(\nu N(t)\Delta t)^k}{k!}, \quad (4.3)$$

$$\mathbb{P}(\{Z_{(N(t)\Delta t)} = k\}) = e^{-\mu N(t)\Delta t} \frac{(\mu N(t)\Delta t)^k}{k!} \quad (4.4)$$

para  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

Ahora en lugar de (3.1) considere

$$n(t, t + \Delta t) = A_{(N(t)\Delta t)}, \quad m(t, t + \Delta t) = Z_{(N(t)\Delta t)}; \quad (4.5)$$

ya que en las igualdades de (4.5),  $A_{(N(t)\Delta t)}$  y  $Z_{(N(t)\Delta t)}$  son variables aleatorias a valores naturales, lo son también  $n(t, t + \Delta t)$  y  $m(t, t + \Delta t)$ . Por eso se tiene,

$$\mathbb{P}(\{n(t, t + \Delta t) = k\}) = \mathbb{P}(\{A_{(N(t)\Delta t)} = k\}) \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots,$$



$$\mathbb{P}(\{m(t, t + \Delta t) = k\}) = \mathbb{P}(\{Z_{(N(t)\Delta t)} = k\}) \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

Por consiguiente, como

$$p_n(k) = \mathbb{P}(\{n(t, t + \Delta t) = k\}), \quad p_m(k) = \mathbb{P}(\{m(t, t + \Delta t) = k\}), \quad (4.6)$$

se tiene (véanse las relaciones (4.3)-(4.4))

$$p_n(k) = \frac{(\nu N(t)\Delta t)^k}{k!} \exp(-\nu N(t)\Delta t), \quad p_m(k) = \frac{(\mu N(t)\Delta t)^k}{k!} \exp(-\mu N(t)\Delta t). \quad (4.7)$$

Debido a que los nacimientos y las muertes son, por hipótesis, eventos independientes, la probabilidad que en el intervalo  $[t, t + \Delta t]$  nazcan  $k$  individuos y mueran  $k'$  individuos está dada por,

$$\mathbb{P}(\{n(t, t + \Delta t) = k\} \cap \{m(t, t + \Delta t) = k'\}) = p_n(k)p_m(k').$$

Luego, estableciendo que  $p_m(k') = 0$  si  $k' < 0$ , de (4.1) se sigue,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{dN(t) = j\}) &= \mathbb{P}(\cup_{k=0}^{\infty} [\{n(t, t + \Delta t) = k\} \cap \{m(t, t + \Delta t) = k - j\}]) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} p_n(k)p_m(k - j), \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde  $j$  es un número entero.

En virtud de (4.8), la esperanza matemática  $\mathbb{E}[dN(t)]$  y la varianza  $\text{Var}(dN(t))$  de la variable aleatoria  $dN(t)$  y la esperanza matemática  $\mathbb{E}[(dN(t))^2]$  del cuadrado de  $dN(t)$  tienen las expresiones,

$$\mathbb{E}[dN(t)] = \sum_{-\infty < j < \infty} j \mathbb{P}(\{dN(t) = j\}) = \sum_{-\infty < j < \infty} j \sum_{k=0}^{\infty} p_n(k)p_m(k - j), \quad (4.9)$$

$$\text{Var}(dN(t)) = \mathbb{E}[(dN(t))^2] - (\mathbb{E}[dN(t)])^2, \quad (4.10)$$

$$\mathbb{E}[(dN(t))^2] = \sum_{j=0}^{\infty} j^2 [\mathbb{P}(\{dN(t) = j\}) + \mathbb{P}(\{dN(t) = -j\})] \quad (4.11)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} j^2 \left[ \sum_{k=0}^{\infty} p_n(k)p_m(k - j) + \sum_{k=0}^{\infty} p_n(k)p_m(k + j) \right].$$

Ahora calculando los límites,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{E}[dN(t)], \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta t} \text{Var}(dN(t)), \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{E}[(dN(t))^2].$$

Para tal, se recuerda que, dentro de la suma  $\sum_{-\infty < j < \infty}$  en la expresión de (4.9) y también dentro de la suma  $\sum_{j=0}^{\infty}$  en la expresión de (4.11), el término con  $j = 0$  contiene el factor  $j = 0$  y por eso son iguales a 0, por consiguiente estos términos no contribuyen a la suma. Por otra parte, se observa que de la relación evidente,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (C \Delta t)^k = \begin{cases} C & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k > 1 \end{cases}$$

y de las expresiones (4.7) se tiene,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta t} p_n(1)p_m(0) &= \nu N(t), & \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta t} p_n(0)p_m(1) &= \mu N(t), \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta t} p_n(j)p_m(k) &= 0 & \text{si } j + k \geq 2. \end{aligned}$$

Por lo tanto se obtiene,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{E}[dN(t)] = (\nu - \mu)N(t), \quad (4.12)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta t} \text{Var}(dN(t)) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{E}[(dN(t))^2] = (\nu + \mu)N(t). \quad (4.13)$$

El proceso estocástico continuo ideal que puede poseer estas características (4.12)-(4.13) es

$$N(t) = N(t_0) + \int_{t_0}^t (\nu - \mu)N(t')dt' + \int_{t_0}^t \sqrt{(\nu + \mu)N(t')}dW_{t'}, \quad (4.14)$$

donde  $W(t)$  es el movimiento browniano. En efecto, si  $N(t)$  es definido por (4.14), dado que, siendo la esperanza matemática de una martingala, se tiene,

$$\mathbb{E} \left[ \int_{t_0}^t \sqrt{(\nu + \mu)N(t')} dW_{t'} \right] = 0,$$

y

$$\mathbb{E}[N(t) - N(t_0)] = \mathbb{E} \left[ \int_{t_0}^t (\nu - \mu)N(t') dt' \right] = \int_{t_0}^t \mathbb{E}[(\nu - \mu)N(t')] dt'.$$

Por consiguiente, si  $N(t_0)$  es concentrado en un valor, se tiene,

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{1}{t - t_0} \mathbb{E}[N(t) - N(t_0)] = (\nu - \mu)N(t_0).$$

Para hallar una relación que corresponda a (4.12) de manera más general, es preciso utilizar la noción de esperanza matemática condicional. En efecto, si  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$  es una base estocástica en la cual son definidos los procesos estocásticos  $N(t)$  y  $W_t$ , entonces un análogo razonamiento nos lleva a

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{E}[N(t + \Delta t) - N(t) | \mathcal{F}_t] = (\nu - \mu)N(t).$$

En cambio, de (4.14) y del cálculo de  $\mathbb{E}[N(t) - N(t_0)]$  se sigue

$$\begin{aligned} & \text{Var}(N(t) - N(t_0)) \\ &= \mathbb{E} \left[ \left( N(t) - N(t_0) - \int_{t_0}^t \mathbb{E}[(\nu - \mu)N(t')] dt' \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \left( \int_{t_0}^t ((\nu - \mu)N(t') - \mathbb{E}[(\nu - \mu)N(t')]) dt' \right)^2 \right] \\ &+ 2\mathbb{E} \left[ \left( \int_{t_0}^t ((\nu - \mu)N(t') - \mathbb{E}[(\nu - \mu)N(t')]) dt' \right) \left( \int_{t_0}^t \sqrt{(\nu + \mu)N(t')} dW_{t'} \right) \right] \\ &+ \mathbb{E} \left[ \left( \int_{t_0}^t \sqrt{(\nu + \mu)N(t')} dW_{t'} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Se observa que, en virtud de la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_{t_0}^t ((\nu - \mu)N(t') - \mathbb{E}[(\nu - \mu)N(t')]) dt' \right)^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
&\leq (t - t_0) \int_{t_0}^t \mathbb{E}[(\nu - \mu)N(t') - \mathbb{E}[(\nu - \mu)N(t')])^2] dt' \\
&\leq \sup_{t_0 \leq t' \leq t} \text{Var}((\nu - \mu)N(t'))(t - t_0)^2
\end{aligned}$$

Por otro lado, como es bien conocido por la teoría de la integración estocástica,

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_{t_0}^t \sqrt{(\nu + \mu)N(t')} dW_{t'} \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \int_{t_0}^t (\nu + \mu)N(t') dt' \right].$$

Por eso se tiene también,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left[ \left( \int_{t_0}^t ((\nu - \mu)N(t') - \mathbb{E}[(\nu - \mu)N(t')]) dt' \right) \left( \int_{t_0}^t \sqrt{(\nu + \mu)N(t')} dW_{t'} \right) \right] \\
&\leq \left[ \sup_{t_0 \leq t' \leq t} \text{Var}((\nu - \mu)N(t')) \right]^{1/2} \left[ \sup_{t_0 \leq t' \leq t} \mathbb{E}[(\nu + \mu)N(t')] \right]^{1/2} (t - t_0)^{3/2}.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, si  $N(t_0)$  está concentrado en un valor, se tiene,

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{1}{t - t_0} \text{Var}(N(t) - N(t_0)) = (\nu + \mu)N(t_0).$$

En lo general razonando de manera análoga, pero utilizando la noción de esperanza matemática condicional, se tendrá,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{E}[(N(t + \Delta t) - N(t) - \mathbb{E}[N(t + \Delta t) - N(t) | \mathcal{F}_t])^2 | \mathcal{F}_t] = (\nu + \mu)N(t_0),$$

lo que corresponde exactamente a (4.13).

Escribiendo (4.14) en la forma diferencial

$$dN(t) = (\nu - \mu)N(t)dt + \sqrt{(\nu + \mu)N(t)}dW_t, \quad (4.15)$$

se llamará al término  $\sqrt{(\nu + \mu)N(t)}dW_t$  de **Estocasticidad Demográfica**.

Hasta ahora, para evitar notaciones inútilmente pesadas, no se ha escrito la posible dependencia de  $\nu$  y  $\mu$  de  $t$  y de  $N(t)$ . Pero aún cuando ellos dependen de  $t$  o de  $N(t)$ , el resultado es igual. Por eso se puede establecer que  $\nu$  y  $\mu$  en (4.15) puedan ser  $\nu = \nu(t)$  o  $\nu = \nu(t, N(t))$  y análogamente para  $\mu$ .

## 4.2. Estocasticidad Ambiental

Retornando a (4.1) y (4.2) y, teniendo en cuenta la eventualidad de que en ellas  $\nu$  y  $\mu$  puedan variar, las relaciones quedan expresadas en la forma,

$$dN(t) = N(t + \Delta t) - N(t) = \lambda(t, N(t), \Delta t)N(t), \quad (4.16)$$

$$\lambda(t, N(t), \Delta t) \approx (\nu(t, N(t)) - \mu(t, N(t)))\Delta t.$$

Se puede interpretar  $\lambda(t, N(t), \Delta t)$  como coeficiente de incremento durante el intervalo  $[t, t + \Delta t]$  de la población  $N(t)$ , que puede recibir variaciones debidas a las variaciones de las condiciones ambientales y eventualmente a la evolución misma de la población. Para fijar ideas, provisionalmente, fije  $\Delta t$ , dejando variar  $t$ .

Dado que las variaciones del coeficiente  $\lambda(t, N, \Delta t)$  son en parte previsibles y en parte imprevisibles, se busca descomponerlas, designando por  $\lambda_0(t, N, \Delta t)$  la parte previsible y por  $\lambda_1(t, N, \Delta t)$  la parte imprevisible, luego la descomposición de  $\lambda(t, N, \Delta t)$  es

$$\lambda(t, N(t), \Delta t) = \lambda_0(t, N(t), \Delta t) + \lambda_1(t, N(t), \Delta t),$$

Dado  $\Delta t$ , la parte previsible  $\lambda_0(t, N, \Delta t)$  será una función bien determinada de  $t$  y de  $N$  y tendrá aproximadamente la forma

$$\lambda_0(t, N, \Delta t) = \alpha(t, N)\Delta t.$$

Por otra parte, la parte imprevisible  $\lambda_1(t, N, \Delta t)$ , a su vez, se forma por una parte acumulativa y por una parte no acumulativa, que se denota por  $\lambda_{1,0}(t, N, \Delta t)$  y  $\lambda_{1,1}(t, N, \Delta t)$  respectivamente. Para la parte acumulativa de las variaciones imprevisibles se quiere designar una perturbación  $\lambda_{1,0}(t, N, \Delta t)$  tal que, si  $\lambda_{1,0}(t, N, \Delta t)$  toma cierto valor, entonces  $\lambda_{1,0}(t + \Delta t, N, \Delta t)$  debe estar cerca de este valor. Esta propiedad permite aproximarlos por

$$\lambda_{1,0}(t, N, \Delta t) = \beta(H(t), N)\Delta t,$$

donde por  $\beta(h, N)$  es una función de  $h$  y de  $N$  a valores reales, mientras por  $H(t)$  es un proceso estocástico a valores en un oportuno espacio.

Finalmente considere la parte no acumulativa  $\lambda_{1,1}(t, N, \Delta t)$  de las variaciones imprevisibles. La parte no acumulativa designa variaciones tales que el valor de  $\lambda_{1,1}(t, N, \Delta t)$  no influye el posible valor de  $\lambda_{1,1}(t + \Delta t, N, \Delta t)$ . Sea una razonable aproximación la siguiente,

$$\lambda_{1,1}(t, N, \Delta t) = \kappa(t)\Lambda(\Delta t),$$

donde  $\kappa(t)$  es un coeficiente real, función de  $t$ , mientras que  $\Lambda(\Delta t)$  es una variable aleatoria con valores reales. La no acumulatividad se expresa por la relación: si

$$\lambda_{1,1}(t, N, \Delta t) = \kappa(t)\Lambda(\Delta t), \quad \lambda_{1,1}(t_1, N, \Delta_1 t) = \kappa(t_1)\Lambda_1(\Delta_1 t)$$

y  $[t, t + \Delta t[ \cap [t_1, t_1 + \Delta_1 t[ = \emptyset$ , entonces  $\Lambda(\Delta t)$  y  $\Lambda_1(\Delta_1 t)$  son independientes.

Además conforme a la noción de “imprevisibilidad” y por eso idealmente “falta total de información” (a excepción de amplitud media), se puede suponer que la variable aleatoria  $\Lambda(\Delta t)$  tenga ley normal centrada. Es decir, la ley de la variable aleatoria  $\Lambda(\Delta t)$  será,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi V}} e^{-\frac{x^2}{2V}} dx, \quad (4.17)$$

donde  $V = \text{Var}(\Lambda(\Delta t))$ , mientras  $dx$  es la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}$ .

Resumiendo lo considerado se puede escribir,

$$\lambda(t, N(t), \Delta t) = \alpha(t, N(t))\Delta t + \beta(H(t), N(t))\Delta t + \kappa(t)\Lambda(\Delta t). \quad (4.18)$$

Ahora considérese un intervalo  $[t_0, \bar{t}]$ , tómese  $\Delta t = \frac{\bar{t}-t_0}{n}$  y  $t_k = t_0 + k\Delta t$  ( $k = 0, \dots, n-1$ ), sustitúyase en (4.16) la expresión (4.18) por  $t = t_k$ . Si se suma estas expresiones donde  $k = 0, \dots, n-1$ , se obtiene

$$N(\bar{t}) = N(t_0) + \sum_{k=0}^{n-1} [\alpha(t_k, N(t_k)) + \beta(H(t_k), N(t_k))]\Delta t N(t_k) + \sum_{k=0}^{n-1} \kappa(t_k)\Lambda_k(\Delta t)N(t_k), \quad (4.19)$$

donde  $\Lambda_k(\Delta t)$ ,  $k = 0, \dots, n-1$  son variables aleatorias, todas independientes y con la misma ley dada por (4.17).

Ahora recuérdese que la amplitud del intervalo  $\Delta t$  es del todo arbitraria. Es decir, se pueden tomar  $2\Delta$  ó  $\frac{1}{2}\Delta t$  o en general  $r\Delta t$  en lugar de  $\Delta t$ . Para que  $\Lambda(r\Delta t)$  tenga la misma característica independientemente del  $r$  escogido, la ley de  $\Lambda(2\Delta t)$  debe coincidir con la de  $\Lambda(\Delta t) + \Lambda(\Delta t)$ . Esta última es dada por la convolución de dos de las mismas funciones dadas en (4.17) y, como es conocido, es

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi 2V}} e^{-\frac{x^2}{2 \cdot 2V}} dx.$$

De manera más general, la ley de  $\Lambda(r\Delta t)$  debe ser

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi rV}} e^{-\frac{x^2}{2rV}} dx.$$

Estas propiedades de la variable aleatoria  $\Lambda(\Delta t)$  se verifican si en (4.19) se toma

$$\Lambda_k(\Delta t) = \sqrt{\frac{V}{\Delta t}} [W_{t_{k+1}} - W_{t_k}],$$

con el movimiento browniano  $W(t)$ . Además, se constata que  $\sqrt{\frac{V}{\Delta t}} = \sqrt{\frac{\text{Var}(\Lambda(\Delta t))}{\Delta t}}$  no depende de  $\Delta t$ , por eso se puede tomar  $\varrho^2 = \frac{V}{\Delta t}$ . Luego, la fórmula (4.19) se reduce a

$$N(\bar{t}) = N(t_0) + \sum_{k=0}^{n-1} [\alpha(t_k, N(t_k)) + \beta(H(t_k), N(t_k))] \Delta t N(t_k). \quad (4.20)$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \kappa(t_k) N(t_k) \varrho [W_{t_{k+1}} - W_{t_k}].$$

En (4.20) la elección de la amplitud del intervalo  $\Delta t$  es arbitraria y se puede intentar hacerla tender a 0 (aumentando al mismo tiempo el número  $n$  de manera inversamente proporcional a  $\Delta t$ ). Como es conocido, cuando  $\Delta t$  tiende a 0, la primera suma del segundo miembro de la fórmula (4.20) tiende a una integral respecto a la medida de Lebesgue  $dt$  (aún cuando  $\beta(t, N)$  es un proceso estocástico, no hay ninguna dificultad para definir la integral), mientras la segunda suma se hará una integral

estocástica.

Así se tendrá,

$$N(\bar{t}) = N(t_0) + \int_{t_0}^{\bar{t}} [\alpha(t, N(t)) + \beta(t, N(t))]N(t)dt + \int_{t_0}^{\bar{t}} \varrho\kappa(t)N(t)dW_t. \quad (4.21)$$

Expresando la fórmula (2.19) en la forma diferencial, se tiene,

$$dN(t) = [\alpha(t, N(t)) + \beta(t, N(t))]N(t)dt + \kappa(t)\varrho N(t)dW_t. \quad (4.22)$$

El término  $\kappa(t)\varrho N(t)dW(t)$  que aparece en (4.22) se denominará ***Estocasticidad Ambiental***.

En los últimos años, han aparecido numerosos trabajos de investigación en distintos campos de aplicación de la biomatemática que incorporan elementos estocásticos en su formulación, muchos de ellos se expresan a través de ecuaciones diferenciales estocásticas.



---

## Capítulo 5

# Dinámica Estocástica Impulsiva

### 5.1. Un Modelo Estocástico Impulsivo

El objetivo principal de este modelo es el estudio de un sistema compuesto por una biomasa o recurso biológico, inserta en un medio aleatorio y expuesta a discontinuidades de la dinámica, denominadas impulsos. Estos impulsos no ocurren en tiempos predeterminados, sino que dependen de la propia dinámica y del medio en el que se desarrolla.

Se denominará  $N(t)$ , al tamaño del recurso biológico en estudio en el tiempo  $t$  y  $\tau_k$  indicará el  $k$ -ésimo tiempo de impulso, donde  $k \in \mathbb{N}$ .

A continuación se establecen los supuestos básicos del modelo para este sistema.

- La dinámica del recurso biológico, entre impulso e impulso, está modelada por una ecuación diferencial estocástica del tipo expuesto en la ecuación (2.4). Para precisar mejor la ecuación en cuestión se describe lo siguiente,

$$\begin{cases} dN(t) = r(N(t))N(t)dt + \sigma N(t)dB(t); & t \in [\tau_k, \tau_{k+1}[ \\ N(\tau_{k-1}) = N_0 \end{cases} \quad (5.1)$$

donde la función  $r$  es la tasa de crecimiento del recurso,  $\sigma$  es una constan-

te positiva llamada intensidad estocástica del medio,  $B(t)$  es un movimiento Browniano estandar y  $N_0$  es el tamaño inicial del recurso.

- Los tiempos de impulso  $\tau_k$  ocurren cuando el recurso  $N$  alcanza un tamaño prefijado  $C$ , es decir  $N(\tau_k^-) = C$ ,  $\forall k \geq 1$ . Como el recurso  $N$  evoluciona en un medio aleatorio,  $N(t)$  es una variable aleatoria para todo tiempo  $t$ , y por tanto los tiempos  $\tau_k$  son tiempos aleatorios. Estos tiempos se pueden definir en forma más precisa de la siguiente forma,

$$\tau_k = \inf \{t > \tau_{k-1}; N(t) \geq C\}, \quad \text{con tiempo inicial } \tau_0 = 0. \quad (5.2)$$

De esta definición se desprende que los tiempos  $\tau_k$  representan tiempos de parada en el sentido visto en la sección 1.3.3.

- Los impulsos  $\Delta N$  ocurridos en los tiempos  $\tau_k$ , cumplen la función de reenviar, en forma instantánea, el tamaño de la población al estado inicial  $N_0$ , es decir,

$$\Delta N(\tau_k) := N(\tau_k^-) - N(\tau_k) = C - N_0 \quad (5.3)$$

Por lo tanto, en resumen el modelo para el *Sistema de Dinámica Impulsiva de Poblaciones en Medio Aleatorio*, se representa según el siguiente sistema de ecuaciones acopladas,

$$\left\{ \begin{array}{ll} dN(t) = r(N(t))N(t)dt + \sigma N(t)dB(t); & t \in [\tau_{k-1}, \tau_k[ \\ N(\tau_k) = N_0 \\ \tau_k = \inf \{t > \tau_{k-1}; N(t) \geq C\} \\ \tau_0 = 0 \\ \Delta N(\tau_k) = C - N_0 \end{array} \right. \quad (5.4)$$

### 5.1.1. Buen Planteamiento del Sistema

La demostración de existencia y unicidad del modelo se realizará en varios pasos, los cuales se dividirán en algunos teoremas y corolarios. La estructura de la demostración será la siguiente,

1. Demostrar que existe un único proceso de cuadrado integrable que soluciona la ecuación (5.1) para tiempos en un intervalo  $[0, T]$ .
2. Demostrar que existe un único proceso de cuadrado integrable que soluciona la ecuación (5.1) para tiempos en un intervalo  $[S, T]$ .
3. Demostrar que los tiempos de paradas definidos en la ecuación (5.2) son variables aleatorias de esperanza finita.
4. Concluir que existe un único proceso estocástico, en el sentido casi seguro, que soluciona el sistema de ecuaciones (5.4).

La herramienta principal para demostrar existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales es la proporcionada por el Teorema 2.1.8. El principal inconveniente de este teorema es que requiere de hipótesis muy fuertes, que en muchas ecuaciones importantes no se satisfacen, incluyendo algunas provenientes de modelos de crecimiento poblacional. Por lo tanto se buscará flexibilizar dichas hipótesis de forma de poder incluir la mayor parte de los modelos biológicos relevantes.

**Teorema 5.1.** Sean  $T$ ,  $N_0$  y  $\sigma$  constantes positivas, donde  $r \in C^1([0, \infty[)$  tal que  $\sup_{x \in \mathbb{R}_+} x^2 r(x) < \infty$  y  $B(t)$  un movimiento Browniano estandar.

Entonces existe un proceso  $N(t)$ , solución de la ecuación

$$\begin{cases} dN(t) = r(N(t))N(t)dt + \sigma N(t)dB(t); & t \in [0, T] \\ N(0) = N_0 \end{cases} \quad (5.5)$$

*Demostración.*

En primer lugar, las hipótesis de este teorema no son suficientes para utilizar directamente el teorema (2.1.8), por lo tanto se reemplazará la ecuación (5.5) por una ecuación aproximada. Considérese la familia de ecuaciones parametrizadas por el número real  $L$ ,

$$f_L(x) := \begin{cases} r(x)x & ; \text{ si } x \leq L \\ r(L)L & ; \text{ si } x \geq L \end{cases} \quad (5.6)$$

con lo cual se obtiene la siguiente ecuación aproximada,

$$\begin{cases} dN_L(t) &= f_L(N_L(t))dt + \sigma N_L(t)dB(t) \\ N_L(0) &= N_0 \end{cases} \quad (5.7)$$

Se verificará que la ecuación (5.7) cumple con las hipótesis del teorema (2.1.8).

Primero se verificarán las condiciones de Lipschitz sobre  $f_L$ ,

1. Si  $x, y > L$ , entonces  $|f_L(x) - f_L(y)| = |L \cdot r(L) - L \cdot r(L)| = 0 \leq L|x - y|$ .
2. Si  $x < y \leq L$ , entonces por el teorema del valor medio, existe  $\tilde{x} \in ]x, y[$ , tal que  $|f_L(x) - f_L(y)| = |f'_L(\tilde{x})(x - y)| = |f'_L(\tilde{x})||x - y|$ .
3. Si  $x \leq L < y$ , entonces, nuevamente por el teorema del valor medio, existe  $\bar{x} \in ]x, L[$  tal que

$$\begin{aligned} |f_L(x) - f_L(y)| &= |x \cdot r(x) - L \cdot r(L)| = |f_L(x) - f_L(L)| = |f'_L(\bar{x})||x - L| \\ &= |f'_L(\bar{x})|(L - x) < |f'_L(\bar{x})||y - x| \quad \text{pues } x \leq L < y. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función  $f_L$  cumple las condiciones de Lipschitz. Nótese que basta este resultado para verificar las hipótesis del teorema (2.1.8), ya que la función  $\sigma x$  es lineal por lo que es evidente lipschitziana tomando como constante de Lipschitz  $a$ ,  $\max\{L, \tilde{x}, \bar{x}, \sigma\}$ , el resultado es inmediato.

A continuación se verifican las condiciones de acotamiento.

Como por hipótesis  $r \in C^1([0, \infty[)$  entonces existe una constante  $K_1 > 0$  tal que

$$K_1 = \sup_{x \in [0, L]} |r(x)|$$

por lo tanto si  $0 < x < L$  se tiene que  $|r(x)x| \leq K_1|x|$ , luego

$$|f_L(x)|^2 + |\sigma x|^2 < (K_1^2 + \sigma^2)x^2 < (K_1^2 + \sigma^2)(1 + x^2).$$

Si  $x > L$ , entonces

$$\begin{aligned} |f_L(x)|^2 + |\sigma x|^2 &< |r(L)|^2 L^2 + \sigma^2 x^2 < (r^2(L) + \sigma^2)(L^2 + x^2) \\ &< (r^2(L) + \sigma^2)2x^2 < 2(r^2(L) + \sigma^2)(1 + x^2). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación (5.7) satisface las hipótesis del Teorema (2.1.8) para todo  $L > 0$ , por lo que existe un único proceso  $N_L(t)$  solución de la ecuación (5.7).

Se demostrará ahora, que la sucesión de procesos  $N_L(t)$  converge a la solución de la ecuación (5.5) cuando  $L \rightarrow \infty$ .

Usando la fórmula de Itô para la función  $\psi(x) = x^2$  y la ecuación (5.7) para el cálculo de  $\psi(N_L(t))$ , se obtiene lo siguiente,

$$d\psi = 2N_L(t)dN_L(t) + (dN_L(t))^2,$$

que en su forma integral se puede expresar como,

$$N_L^2(t) = N_0^2 + 2 \int_0^t f_L(N_L(s))N_L(s)ds + 2 \int_0^t \sigma N_L^2(s)dB(s) + \int_0^t \sigma^2 N_L^2(s)ds. \quad (5.8)$$

Además, por la proposición (2.3) se tiene,  $\mathbb{E} \left[ \int_0^t \sigma N_L^2(s)dB(s) \right] = 0$ ,

luego se puede concluir,

$$N_L^2(t) = N_0^2 + 2 \int_0^t f_L(N_L(s))N_L(s)ds + \int_0^t \sigma^2 N_L^2(s)ds,$$

como por hipótesis  $\sup_{x \in \mathbb{R}_+} x^2 r(x) < \infty$ , entonces existe una constante positiva  $K_2$  tal que  $K_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} x^2 r(x)$ . Aplicando la esperanza a la ecuación (5.8), esta se reduce a,

$$\mathbb{E}[N_L^2(t)] \leq N_0^2 + K_2 t + \sigma^2 \int_0^t \mathbb{E}[N_L^2(s)]ds < N_0^2 + K_2 T + \sigma^2 \int_0^t \mathbb{E}[N_L^2(s)]ds. \quad (5.9)$$

Por lo tanto es posible aplicar la desigualdad de Gronwall<sup>27</sup> a la desigualdad (5.9), obteniendo así,

$$\mathbb{E}[N_L^2(t)] \leq (N_0^2 + K_2 T)e^{\sigma^2 t} < (N_0^2 + K_2 T)e^{\sigma^2 T}, \quad \forall t \in [0, T].$$

Por lo tanto haciendo  $C_T = (N_0^2 + K_2 T)e^{\sigma^2 T}$  se tiene,

$$\mathbb{E}[N_L^2(t)] \leq C_T, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (5.10)$$

Lo que implica que los procesos  $N_L(t)$  son de cuadrado integrables y acotados por una constante que no depende de  $L$ .

A continuación se buscará estimar el  $\sup_{t \in [0, T]} N_L(t)$ , utilizando la ecuación (5.7).

$$\sup_{t \in [0, T]} N_L(t) \leq N_0 + \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t f_L(N_L(s))ds + \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t \sigma N_L(s)dB(s) \quad (5.11)$$

La primera integral se puede dominar mediante la siguiente hipótesis del teorema,  $\sup_{x \in \mathbb{R}_+} x^2 r(x) < \infty$ , por lo que existe una constante positiva  $K_3 = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} x r(x)$ , con lo

que se tiene,

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_0^t f_L(N_L(s)) ds = \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t N_L(s) r(N_L(s)) ds \leq \sup_{t \in [0, T]} K_3 t = K_3 T.$$

En la segunda integral se utilizará la desigualdad de Doob ver(2.1) para martingalas,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t \sigma N_L(s) dB(s) \right] &\leq \left( \mathbb{E} \left[ \sup_{t \in [0, T]} \left( \int_0^t \sigma N_L(s) dB(s) \right)^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\ 2 \left( \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^T \sigma N_L(t) dB(t) \right)^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} &= 2 \left( \mathbb{E} \left[ \int_0^T \sigma^2 N_L^2(t) dt \right] \right)^{\frac{1}{2}} \\ \mathbb{E} \left[ \sup_{t \in [0, T]} \int_0^t \sigma N_L(s) dB(s) \right] &\leq 2\sigma \int_0^T (\mathbb{E} [N_L^2(t)])^{\frac{1}{2}} dt = 2\sigma T \sqrt{C_T}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, existe una constante positiva  $C'_T$ , tal que  $\mathbb{E} \left[ \sup_{t \in [0, T]} N_L(t) \right] \leq C'_T$ , también dependiente de  $T$ , pero no de  $L$ .

Ahora, utilizando la desigualdad de Markov<sup>25</sup> se obtiene,

$$\mathbb{P} \left( \sup_{t \in [0, T]} N_L(t) \geq L \right) \leq \frac{C'_T}{L}.$$

dada esta desigualdad, se define el siguiente conjunto como,

$$\Omega_L = \left\{ \omega \in \Omega ; \sup_{t \in [0, T]} N_L(\omega, t) < L \right\} \quad (5.12)$$

donde  $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}\}$  es la base estocástica canónica donde están definidos los procesos.

De la definición dada en la ecuación (5.12) se obtiene,

$$\mathbb{P}(\Omega_L) \geq 1 - \frac{C'_T}{L} \quad (5.13)$$

claramente  $\lim_{L \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Omega_L) = 1$  y nótese que si  $L < L'$ , sobre  $\Omega_L$ , se cumple

$$N_L(t) = N_{L'}(t) \quad \text{c.s.}$$

Por lo tanto existe un proceso  $N(t)$  tal que  $N_L(t) \rightarrow N(t)$  c.s. cuando  $L \rightarrow \infty$ .

Ahora escribiendo la ecuación (5.7) en su forma integral,

$$N_L(t) = N_0 + \int_0^t f_L(N_L(s))ds + \sigma \int_0^t N_L(s)dB(s),$$

y tomando límite se obtiene,

$$N(t) = N_0 + \int_0^t r(N(s))N(s)ds + \sigma \int_0^t N(s)dB(s),$$

que es el resultado buscado.

Es preciso notar que la monotonía de los procesos  $N_L(t)$  permiten hacer el paso del límite al interior de las integrales, con lo que concluye el teorema.  $\square$

**Corolario 5.1.** *Bajo las hipótesis del Teorema 5.1, se tiene lo siguiente,*

- a)  $\mathbb{E}[N^2(t)] < \infty \quad \forall t < T.$
- b)  $\mathbb{E} \left[ \int_0^t N^2(s)ds \right] < \infty \quad \forall t < T.$

*Demostración.* Aplicando límite en la desigualdad (5.10), se obtiene,

$$\mathbb{E}[N^2(t)] \leq C_T, \quad \forall t \in [0, T]$$

quedando demostrado el item a). El item b) es consecuencia inmediata del item a).  $\square$

**Teorema 5.2.** *Sean  $S$ ,  $T$ ,  $N_0$  y  $\sigma$  constantes positivas, donde  $S < T$ ,  $r \in C^1([0, \infty[)$  tal que  $\sup_{x \in \mathbb{R}_+} x^2 r(x) < \infty$  y  $B(t)$  un movimiento Browniano estandar.*



Entonces existe un proceso  $N(t)$ , solución de la ecuación

$$\begin{cases} dN(t) = r(N(t))N(t)dt + \sigma N(t)dB(t); & t \in [S, T] \\ N(S) = N_0 \end{cases} \quad (5.14)$$

*Demostración.* Haciendo el cambio de variable temporal  $t' = t - S$  se transforma (5.14) en la siguiente ecuación,

$$\begin{cases} dN_1(t') = r(N_1(t'))N_1(t')dt' + \sigma N_1(t')dB_1(t'); & t' \in [0, T - S] \\ N_1(0) = N_0 \end{cases}$$

donde  $B_1(t') = B(t' + S) - B(S)$  es un Movimiento Browniano estandar que cumple con la igualdad  $dB_1(t') = dB(t)$ . Por lo tanto por el Teorema (5.1) existe un único proceso  $N_1(t')$  solución de esta ecuación tal que  $N(t) := N_1(t - S)$ , para todo  $t \in [S, T]$  soluciona la ecuación (5.14).  $\square$

**Teorema 5.3.** Sean  $N_0$ ,  $r$  y  $\sigma$  como en el Teorema (5.1) y tales que existe una constante positiva  $C > N_0$  donde se cumple que  $\inf_{x \in [0, C]} r(x) > \frac{\sigma^2}{2}$ , entonces el tiempo de parada  $\tau = \inf \{t > 0; N(t) \geq C\}$  posee esperanza finita.

*Demostración.* Sean  $\alpha$  y  $\beta$  definidas de la siguiente forma,

$$\alpha := \inf_{x \in [0, C]} r(x) \quad \text{y} \quad \beta := \sup_{x \in [0, C]} r(x)$$

entonces las soluciones de las ecuaciones,

$$N_\alpha(t) = N_0 + \int_0^t \alpha N_\alpha(s)ds + \sigma \int_0^t N_\alpha(s)dB(s)$$

y

$$N_\beta(t) = N_0 + \int_0^t \beta N_\beta(s)ds + \sigma \int_0^t N_\beta(s)dB(s)$$

son Movimientos Brownianos Geométricos, tal como lo expuesto en la ecuación (2.1),

cuyas soluciones respectivamente son,

$$N_\alpha(t) = N_0 e^{(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B(t)} \quad \text{y} \quad N_\beta(t) = N_0 e^{(\beta - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B(t)}.$$

Como se cumple la desigualdad  $\alpha \leq r(x) \leq \beta$ ,  $\forall x \in [0, C]$ , de la ecuación (5.5) se obtiene,

$$N_\alpha(t) \leq N(t) \leq N_\beta(t), \quad \forall t > 0, \text{ tal que } N(t) \leq C$$

donde  $N(t)$  es la solución de la ecuación (5.5).

Nótese que la desigualdad anterior implica, entre otras cosas, que la cantidad  $N(t)$  es siempre positiva para cualquier valor de  $t$  y para cualquier trayectoria del proceso, los tiempos de parada,

$$\tau := \inf \{t > 0; N(t) \geq C\},$$

$$\tau_\alpha := \inf \{t > 0; N_\alpha(t) \geq C\} \quad \text{y} \quad \tau_\beta := \inf \{t > 0; N_\beta(t) \geq C\}$$

satisfacen la desigualdad  $\tau_\beta \leq \tau \leq \tau_\alpha$ .

Analizando la condición  $N_\alpha(t) \geq C$  se obtiene,

$$\mathbb{E}[\tau_\alpha] = \frac{1}{\alpha} \ln \left( \frac{C}{N_0} \right)$$

donde la cantidad  $\alpha - \frac{\sigma^2}{2}$  es positiva, debido a las hipótesis del Teorema.

Análogamente se obtiene para  $\mathbb{E}[\tau_\beta] = \frac{1}{\beta} \ln \left( \frac{C}{N_0} \right)$ ,

por lo que se cumple la desigualdad  $\mathbb{E}[\tau_\beta] \leq \mathbb{E}[\tau] \leq \mathbb{E}[\tau_\alpha]$ , de donde se deduce el teorema.  $\square$

Hasta ahora se ha logrado demostrar que bajo las hipótesis del Teorema (5.3), la ecuación (5.5) tiene solución única en sentido c.s. y que el tiempo de parada  $\tau$  es de

esperanza finita, lo que implica que  $\tau < \infty$  c.s.. Por lo que el proceso,

$$N_1(t) = 1_{\{t \in [0, \tau[ \}} N(t) + 1_{\{t = \tau\}} N_0$$

está bien definido y cumple con las propiedades siguientes,

- $0 < N_1(t) < C; \quad \forall t \in [0, \tau[$
- $N_1(\tau) = N_0$
- $N_1(\tau^{-1}) = C$
- Soluciona la ecuación (5.4) para el caso  $k = 1$ , tomando  $\tau_0 = 0$  y  $\tau_1 = \tau$ .

El Teorema (5.2) y el Teorema (5.3) implican que la ecuación,

$$\begin{cases} dN(t) = r(N(t))N(t)dt + \sigma N(t)dB(t); & t \in [\tau, T] \\ N(\tau) = N_0 \end{cases}$$

posee solución única para toda elección de  $T > \tau$ . En rigor  $T$  también es una variable aleatoria dependiente de  $\tau$ , pero trayectoria a trayectoria esta ecuación esta bien definida, pero es dependiente de la solución en el intervalo  $[0, \tau]$ .

Como se viera en la demostración del Teorema (5.2), esta ecuación es equivalente a la ecuación,

$$\begin{cases} dN_1(t) = r(N_1(t))N_1(t)dt + \sigma N_1(t)dB_1(t); & t \in [0, T - \tau] \\ N_1(0) = N_0 \end{cases}$$

Se define ahora el tiempo de parada  $\tau_2 = \inf\{t > \tau; N(t) \geq C\}$ , que nuevamente es un tiempo de parada de esperanza finita y el proceso

$$N_2(t) = 1_{t \in [\tau_1, \tau_2[} N(t) + 1_{\{t = \tau_2\}} N_0$$

cumple con las propiedades,

- $0 < N_2(t) < C; \quad \forall \tau_1 \leq t < \tau_2$
- $N_2(\tau_2) = N_0$
- $N_2(\tau_2^{-1}) = C$
- Soluciona la ecuación (5.4) para el caso  $k = 2$ .

Siguiendo el razonamiento en forma inductiva y tomando  $N_0(t) = N(t)$ , se tiene

$$\tilde{N}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 1_{\{t \in [\tau_{k-1}, \tau_k]\}} N_k(t)$$

es la solución de la ecuación (5.4) con lo que se demuestra la existencia de solución del modelo de la *Dinámica Estocástica Impulsiva*. La unicidad es consecuencia de la unicidad de la solución tramo a tramo.

---

## Capítulo 6

# Un Modelo Estocástico de Competición con Difusión Espacial

Considere un sistema ecológico formado por  $n$  especies que viven en una región  $D \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ , y entre las cuales hay una relación de competición. Denote por

$$N_i(t, x)$$

la densidad de poblacional de la especie  $i$  en el instante  $t$  y al punto  $x \in D$ . Suponga que, además de las relaciones de competición (y el efecto logístico de la población de la misma especie), influye en la variación de las poblaciones también la difusión espacial de población (por desplazamientos, por diseminación, etc.). Para expresar la difusión en un modelo matemático de variaciones de poblaciones naturalmente hay varias posibilidades. Pero, desde el punto de vista matemático y técnico, el método de la utilización del operador de Laplace es bastante desarrollado, de manera que se utiliza frecuentemente. Por eso, aunque no se excluyan otros métodos, se empezará el presente estudio con la difusión representada por el operador de Laplace.

Como se ha visto ya muchas veces, el típico sistema de ecuaciones estocásticas de poblaciones en competición es,

$$dN_i(t) = \left[ \alpha_i N_i(t) - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} N_i(t) N_j(t) \right] dt + \varrho_i N_i(t) dW_t, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ahora, considerando la densidad de población  $N_i(t, x)$  y añadiendo a las ecuaciones el término

$$\varepsilon_i \Delta N_i(t, x),$$

se tiene, el sistema de ecuaciones,

$$dN_i(t, \cdot) = \left[ (\alpha_i - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} N_j(t, \cdot)) N_i(t, \cdot) + \varepsilon_i \Delta N_i(t, \cdot) \right] dt + \varrho_i N_i(t, \cdot) dW(t), \quad (6.1)$$

para todo  $i = 1, \dots, n$ .

En lo que concierne a las condiciones en la frontera  $\partial D$ , es natural poner, en el primer problema, la condición de Neumann en  $\partial D$ , es decir

$$\nabla N_i(t, x) \cdot \vec{n}(x) = 0 \quad \text{para } x \in \partial D, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.2)$$

donde  $\vec{n}(x)$  denota la normal a la frontera  $\partial D$  en el punto  $x \in \partial D$ . En efecto, la condición (6.2) significa que no hay ni entrada ni salida de poblaciones por la frontera  $\partial D$ .

Para poder enunciar el resultado de existencia y unicidad de la solución, se necesitan las propiedades de los coeficientes y de la perturbación estocástica. Suponga que

$$\alpha_i > 0, \quad \varepsilon_i > 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \beta_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (6.3)$$

$$W_t = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i W_t^{(i)}, \quad (6.4)$$

donde  $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$  es una base ortonormal de  $L^2(D)$  y  $e_i(\cdot) \in L^\infty(D)$  para todos los  $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ;  $W^{(i)}(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , son movimientos brownianos independientes con valores reales.

Se nota que  $\|N_i\|_{L^1(D)}$  ( $N_i(x) \geq 0$ ) es exactamente la población total de la especie  $i$  en el territorio  $D$ ; por eso la norma en  $L^1(D)$  es la norma natural para las poblaciones. Pero, desde el punto de vista matemático, necesitamos la posibilidad de definir bien la integral estocástica

$$\int_0^t \varrho_i N_i(t', \cdot) dW_{t'},$$

lo que nos obliga a considerar la ecuación en un espacio de Hilbert.

Enunciemos formalmente el resultado de existencia y unicidad.

**Proposición 6.1** *Supongamos que  $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$  verifica las relaciones*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 = 1, \quad \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 e_i(\cdot)^2 \right\|_{L^\infty(D)} = K_0 < \infty. \quad (6.5)$$

Sea  $N_0 = (N_{0,1}, \dots, N_{0,n})$  una variable aleatoria  $\mathcal{F}_0$ -medible con valores en  $L^2(D; \mathbb{R}^n)$  tal que  $N_{0,i}(x) > 0$  casi en todas partes en  $D$  y  $\log N_{0,i} \in L^1(D)$ ,  $i = 1, \dots, n$  casi seguramente. Entonces existe un proceso estocástico  $N(t) = (N_1(t), \dots, N_n(t))$  con valores en  $L^2(D; \mathbb{R}^n)$  que satisface la ecuación (6.1), la condición (6.2), la condición inicial  $N_i(0, \cdot) = N_{0,i}(\cdot)$  y las relaciones

$$N_i(t, x) > 0 \text{ casi en todas partes en } D, \quad \forall t \geq 0, \quad \text{casi seguramente,}$$

$$N \in L^\infty(0, T; L^2(D; \mathbb{R}^n)) \cap L^2(0, T; H^1(D; \mathbb{R}^n)) \quad \text{casi seguramente } \forall T > 0.$$

*Demostración.* Para todo  $R > 0$  tome

$$\begin{aligned} \beta_{ij}^{(R)}(N) &= \beta_{ij} N_j & \text{si } \|N\|_{L^2(D; \mathbb{R}^n)} \leq R, \\ \beta_{ij}^{(R)}(N) &= \frac{\beta_{ij} R N_j}{\|N\|_{L^2(D; \mathbb{R}^n)}} & \text{si } \|N\|_{L^2(D; \mathbb{R}^n)} \geq R, \\ & & i, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Con las funciones  $\beta_{ij}^{(R)}(N)$  así definidas, considere el sistema de ecuaciones,

$$\begin{aligned} dN_i^{(R)}(t, \cdot) &= \left[ (\alpha_i - \sum_{j=1}^n \beta_{ij}^{(R)}(N^{(R)}(t, \cdot))) N_i^{(R)}(t, \cdot) + \varepsilon_i \Delta N_i^{(R)}(t, \cdot) \right] dt + \\ &\quad + \varrho_i N_i^{(R)}(t, \cdot) dW_t, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (6.7)$$

con la misma condición en la frontera (6.2) para el proceso desconocido  $N^{(R)}(t, \cdot) = (N_1^{(R)}(t, \cdot), \dots, N_n^{(R)}(t, \cdot))$ ; la ecuación se debe considerar con la condición inicial

$$N_i^{(R)}(0, \cdot) = N_{0,i}(\cdot). \quad (6.8)$$

Si se denota por  $S(t)$  el semigrupo de operadores generado por el operador diferencial  $\varepsilon_i \Delta$  con la condición de Neumann (6.2), se puede escribir el problema (6.7)-(6.8), (6.2) en la forma,

$$\begin{aligned} N_i^{(R)}(t) &= S(t)N_{0,i} + \int_0^t S(t-t')[(\alpha_i - \sum_{j=1}^n \beta_{ij}^{(R)}(N^{(R)}(t'))N_i^{(R)}(t'))]dt' \\ &\quad + \varrho_i \int_0^t S(t-t')N_i^{(R)}(t')dW_{t'}. \end{aligned}$$

Se sabe que esta ecuación en el espacio funcional  $L^2(D; \mathbb{R}^2)$  admite una y sólo una solución

$$N^{(R)}(t) = (N_1^{(R)}(t), \dots, N_n^{(R)}(t))$$

Ahora se verá que  $N_i^{(R)}(t, \cdot)$  son positivas. Para esto se considera la fórmula de Itô aplicada a la función,

$$\Psi(t) = \int_D \log N_i^{(R)}(t, x) dx.$$

Se tiene

$$\begin{aligned} \int_D \log N_i^{(R)}(t, x) dx &= \int_D \log N_{0,i}(x) dx + \alpha_i |D|t - \sum_{j=1}^n \int_0^t \int_D \beta_{ij}^{(R)}(N^{(R)}) dx dt' \\ &\quad + \varepsilon_i \int_0^t \int_D \frac{1}{N_i^{(R)}} \Delta N_i^{(R)} dx dt' + \varrho_i \langle 1, W_t \rangle_{L^2(D)} \\ &\quad - \frac{\varrho_i^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \|e_k\|_{L^2(D)}^2 t. \end{aligned}$$

Se observa que  $\beta_{ij}^{(R)}(N^{(R)})$  queda acotado (véase (6.6)), y

$$\int_D \frac{1}{N_i^{(R)}} \Delta N_i^{(R)} dx = \int_D |\nabla \log N_i^{(R)}|^2 dx,$$

y

$$\int_D W(t, x) dx > -\infty \quad \text{casi seguramente.}$$



Por lo tanto de (6.9) se puede deducir,

$$\int_D \log N_i^{(R)}(t, x) dx > -\infty \quad \text{casi seguramente,}$$

o bien,

$$N_i^{(R)}(t, x) dx > 0 \quad \text{casi en todas partes en } D, \quad \text{casi seguramente.}$$

Para la solución  $N^{(R)}(t, \cdot) = (N_1^{(R)}(t, \cdot), \dots, N_n^{(R)}(t, \cdot))$  de la ecuación (6.7) con la condición en la frontera (6.2) y con la condición inicial (6.8) con  $N_{0,i} \in L^4(D)$  se tienen las siguientes desigualdades,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} \|N^{(R)}(t, \cdot)\|_{L^4(D)}^4 + \mathbb{E} \int_0^T \|N^{(R)}(t, \cdot) \nabla N^{(R)}(t, \cdot)\|_{L^2(D)}^2 dt \leq M_T^1, \quad (6.9)$$

$$\mathbb{E} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} \|N^{(R)}(t, \cdot)\|_{L^2(D)}^2 \right) + \mathbb{E} \int_0^T \|\nabla N^{(R)}(t, \cdot)\|_{L^2(D)}^2 dt \leq M_T^2, \quad (6.10)$$

donde  $M_T^1$  y  $M_T^2$  son constantes que dependen de  $T$  y de la norma de  $N_{0,i}$ , pero no dependen de  $R$ .

Para demostrar (6.9), se aplica la fórmula de Itô a la función,

$$\Psi_1(t) = \|N^{(R)}(t, \cdot)\|_{L^4(D)}^4 = \int_D |N^{(R)}(t, x)|^4 dx.$$

como  $\beta_{ij}^{(R)}(N^{(R)}) \geq 0$ , de los cálculos habituales se obtendrá fácilmente (6.9), utilizando el lema de Gronwall.

Por otra parte, para demostrar (6.10), se considera la fórmula de Itô aplicada a la función,

$$\Psi_2(t) = \|N^{(R)}(t, \cdot)\|_{L^2(D)}^2 = \int_D |N^{(R)}(t, x)|^2 dx,$$

y se utiliza la desigualdad de Doob, ver (2.1)

En efecto, con los cálculos habituales se puede obtener,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|N_i^{(R)}(t, \cdot)\|_{L^2(D)}^2 + 2\varepsilon_i \mathbb{E} \int_0^T \|\nabla N^{(R)}(t, \cdot)\|_{L^2(D)}^2 dt \\
& \leq \mathbb{E} \|N_{0,i}(\cdot)\|_{L^2(D)}^2 + C \mathbb{E} \int_0^T \sup_{0 \leq s \leq t} \|N_i^{(R)}(s, \cdot)\|_{L^2(D)}^2 dt \\
& + \varrho_i \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \langle N_i^{(R)}(t', \cdot)^2, dW_{t'} \rangle_{L^2(D)}
\end{aligned}$$

donde  $C$  es constante. Para el último término del miembro derecho de esta desigualdad, en virtud de la desigualdad de Doob, ver (2.1) y de (6.9) se tiene,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \int_0^t \langle N_i^{(R)}(t', \cdot)^2, dW_{t'} \rangle_{L^2(D)} & \leq \left[ \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \left( \int_0^t \langle N_i^{(R)}(t', \cdot)^2, dW_{t'} \rangle_{L^2(D)} \right)^2 \right]^{1/2} \\
& \leq 2 \left[ \mathbb{E} \left( \int_0^T \langle N_i^{(R)}(t, \cdot)^2, dW_t \rangle_{L^2(D)} \right)^2 \right]^{1/2} \\
& \leq 2 \left[ \mathbb{E} \int_0^T \langle N_i^{(R)}(t, \cdot)^4, \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 e_k(\cdot)^2 \rangle_{L^2(D)} dt \right]^{1/2} \\
& \leq 2K_0^{1/2} \left[ \mathbb{E} \int_0^T \|N_i^{(R)}(t, \cdot)\|_{L^4(D)}^4 dt \right]^{1/2} \\
& \leq 2(K_0 T R_T)^{1/2}.
\end{aligned}$$

No es difícil deducir de aquí la desigualdad (6.10). Ahora se puede demostrar la proposición 7.1. En efecto, de (6.10) se desprende,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \|N^{(R)}(t, \cdot)\|_{L^2(D)} \geq R \}) = 0.$$

De aquí se puede deducir que los procesos estocásticos  $N^{(R)}(t, \cdot)$  convergen a un proceso estocástico  $N(t, \cdot)$ , que es la solución de nuestro problema.

Para el problema (6.1)-(6.2) (con la condición suplementaria  $\beta_{ii} > 0$ ) se puede demostrar que la población total de cada especie, que se puede expresar por la norma en  $L^1(D)$  de  $N_i(t, \cdot)$ , queda uniformemente acotada. Se demuestra esta propiedad

directamente en la forma de

$$\mathbb{E} \|N(t, \cdot)\|_{L^1(D; \mathbb{R}^n)}^k \leq C_k \quad \forall t \geq 0,$$

suponiendo una condición un poco más fuerte de (6.5), es decir, la condición

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 \|e_i(\cdot)\|_{L^\infty(D)}^2 = K_0 < \infty; \quad (6.11)$$

pero, aquí se demostrará el acotamiento uniforme de la población, utilizando la norma en  $L^2(D)$  y suponiendo solamente (6.5), sin utilizar la condición (6.11). Es claro que la norma en  $L^1(D)$  se puede estimar por la de  $L^2(D)$  usando la desigualdad,

$$\int_D N_i(t, x) dx = \|N_i(t, \cdot)\|_{L^1(D)} \leq \sqrt{|D|} \|N_i(t, \cdot)\|_{L^2(D)},$$

donde  $|D|$  denota la medida del dominio  $D$ .

**Proposición 6.2** *Sea  $N(t, \cdot) = (N_1(t, \cdot), \dots, N_n(t, \cdot))$  la solución del problema (6.1)-(6.2) con la condición inicial  $N_i(0, \cdot) = N_{0,i}(\cdot)$ . Además de las condiciones de la proposición 7.1, suponga que*

$$\beta_{ii} > 0 \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.12)$$

y también para  $r \geq 2$

$$\mathbb{E} \|N_0\|_{L^2(D; \mathbb{R}^n)}^r < \infty. \quad (6.13)$$

Entonces existe una constante  $C_r$  tal que

$$\mathbb{E} \|N(t, \cdot)\|_{L^2(D; \mathbb{R}^n)}^r \leq C_r \quad \forall t \geq 0. \quad (6.14)$$

*Demostración.* Tome  $r = 2s$ . Aplicando la fórmula de Itô a la función

$$\Psi(t) = \|N_i(t, \cdot)\|_{L^2(D)}^r = \|N_i(t, \cdot)\|_{L^2(D)}^{2s},$$

se obtiene,

$$\begin{aligned}
\|N_i(t, \cdot)\|_{L^2(D)}^{2s} &= \|N_{0,i}\|_{L^2(D)}^{2s} + 2s \int_0^t \|N_i\|_{L^2(D)}^{2(s-1)} \int_D (\alpha_i N_i^2 - \sum_{j \neq i} \beta_{ij} N_j N_i^2 - \beta_{ii} N_i^3) dx dt' \\
&+ 2s \int_0^t \|N_i\|_{L^2(D)}^{2(s-1)} \varepsilon_i \int_D N_i \Delta N_i dx dt' + 2s \varrho_i \int_0^t \|N_i\|_{L^2(D)}^{2(s-1)} \langle N_i, N_i dW_{t'} \rangle_{L^2(D)} \\
&+ 2s(s-1) \int_0^t \|N_i\|_{L^2(D)}^{2(s-2)} \varrho_i^2 \sum_{k=1}^{\infty} \langle N_i, N_i \lambda_k e_k \rangle_{L^2(D)}^2 dt' \\
&+ s \int_0^t \|N_i\|_{L^2(D)}^{2(s-1)} \varrho_i^2 \sum_{k=1}^{\infty} \langle N_i \lambda_k e_k, N_i \lambda_k e_k \rangle_{L^2(D)} dt'. \tag{6.15}
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las igualdades

$$\begin{aligned}
\int_D N_i \Delta N_i dx &= - \int_D |\nabla N_i|^2 dx \leq 0, \\
\mathbb{E} \int_0^t \|N_i\|_{L^2(D)}^{2(s-1)} \langle N_i, N_i dW_{t'} \rangle_{L^2(D)} &= 0,
\end{aligned}$$

y aplicando la esperanza matemática a la igualdad (6.15) se obtiene,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \|N_i(t, \cdot)\|_{L^2(D)}^{2s} &= \mathbb{E} \|N_{0,i}\|_{L^2(D)}^{2s} \\
&+ 2s \int_0^t \mathbb{E} \|N_i\|_{L^2(D)}^{2(s-1)} \int_D (\alpha_i N_i^2 - \sum_{j \neq i} \beta_{ij} N_j N_i^2 - \beta_{ii} N_i^3) dx dt' \\
&- 2s \varepsilon_i \int_0^t \mathbb{E} \|N_i\|_{L^2(D)}^{2(s-1)} \|\nabla N_i\|_{L^2(D)}^2 dt' \\
&+ 2s(s-1) \int_0^t \mathbb{E} \|N_i\|_{L^2(D)}^{2(s-2)} \varrho_i^2 \sum_{k=1}^{\infty} \langle N_i, N_i \lambda_k e_k \rangle_{L^2(D)}^2 dt' \\
&+ s \int_0^t \mathbb{E} \|N_i\|_{L^2(D)}^{2(s-1)} \varrho_i^2 \sum_{k=1}^{\infty} \langle N_i \lambda_k e_k, N_i \lambda_k e_k \rangle_{L^2(D)} dt' \tag{6.16}
\end{aligned}$$

Se observa que el miembro derecho es derivable con respecto a  $t$ , de manera que  $\mathbb{E} \|N_i(t, \cdot)\|_{L^2(D)}^{2s}$  es igualmente derivable y derivando los dos miembros, se tiene una

ecuación diferencial ordinaria. Además se tienen las desigualdades,

$$\begin{aligned}
 - \int_D (\sum_{j \neq i} \beta_{ij} N_j N_i^2 + \beta_{ii} N_i^3) dx &\leq - \frac{\beta_{ii}}{\sqrt{|D|}} \|N_i\|_{L^2(D)}^3, \\
 \sum_{k=1}^{\infty} \langle N_i, N_i \lambda_k e_k \rangle_{L^2(D)}^2 &= \langle N_i, N_i \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \rangle_{L^2(D)}^2 \leq K_0 \|N_i\|_{L^2(D)}^4, \\
 \sum_{k=1}^{\infty} \langle N_i \lambda_k e_k, N_i \lambda_k e_k \rangle_{L^2(D)} &\leq K_0 \|N_i\|_{L^2(D)}^2.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se deduce que existe una constante  $C_{(s, \varrho_i)}$  tal que,

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E} \|N_i(t, \cdot)\|_{L^2(D)}^r \leq C_{(s, \varrho_i)} \mathbb{E} \|N_i(t, \cdot)\|_{L^2(D)}^r - \frac{r \beta_{ii}}{\sqrt{|D|}} \mathbb{E} \|N_i(t, \cdot)\|_{L^2(D)}^{r+1}. \quad (6.17)$$

Recordando la relación,

$$\mathbb{E} \|N_i(0, \cdot)\|_{L^2(D)}^r = \mathbb{E} \|N_{0,i}\|_{L^2(D)}^r$$

de (6.17) se obtiene,

$$\mathbb{E} \|N_i(t, \cdot)\|_{L^2(D)}^r \leq \max \left( \mathbb{E} \|N_{0,i}\|_{L^2(D)}^r, \sup_{y \geq 0} \left[ C_{(s, \varrho_i)} y - \frac{r \beta_{ii}}{2 \sqrt{|D|}} y^{\frac{r+1}{r}} \right] \right) < \infty,$$

lo que demuestra la proposición 6.2.  $\square$

Con la demostración de esta Proposición, se concluye el buen planteamiento del Modelo Estocástico de Competición con Difusión Espacial, cuya solución es un proceso estocástico que admite momentos de todos los órdenes.

Con este resultado además se concluyen los resultados propuestos en esta tesis.

---

## Capítulo 7

# Conclusiones y Posibles Trabajos Futuros

El desarrollo de esta tesis de maestría, ha permitido explorar la posibilidad de modelamiento que las ecuaciones diferenciales parciales tienen en el estudio de la dinámica de poblaciones en medio aleatorio. Es destacable la complejidad y riqueza matemática que es posible desarrollar a partir de problemas de la naturaleza, que en principio se ve muy alejada de ella, como es la biología. Este hecho sin duda, refuerza la postura filosófica a favor de la unidad de la ciencia y podemos estar seguros que la naturaleza será siempre una inagotable fuente de inspiración para el avance de la disciplina matemática.

La problemática general, de los fenómenos que evolucionan en medios aleatorios es una muy reciente área de estudio y no sólo desde el punto de vista matemático, sino también desde otras áreas del saber como la física, la economía, la sociología y por cierto la biología. Pero es, sin duda, el enfoque matemático el que permite obtener resultados más generales y más fáciles de exponer de una disciplina a otra. Quedan en esta tesis, muchas interrogantes y problemas interesantes de abordar, como la conveniencia del formalismo matemático utilizado, las hipótesis implícitas en la construcción de los modelos, la comparación de resultados con simulaciones numéricas, resultados de comportamiento cualitativo, entre muchas otras que desbordan los propósitos y objetivos de la presente tesis.

---

# Apéndice A

```
function v = NewSist
uo=[1.5;0];
syms u v
fnombre=[(2-u)+(1.62*v*exp(-.5*v)/(1+1.62*v));(1.8*u*exp(-.5*v)/(1+1.62*v))-2];
fderiv=jacobian(fnombre);
tolerancia=1.e-5;
maxiter=4;
iter=1;
f=inline(fnombre);
jf=inline(fderiv);
error=norm(f(uo(1),uo(2)),2);
fprintf('error=%12.8f\n',error);
while error>=tolerancia
    fuo=f(uo(1),uo(2));
    fpuo=jf(uo(1),uo(2));
    u1=uo-inv(fpuo)*fuo;
    fu1=f(u1(1),u1(2));
    error=norm((fu1),2);
    fprintf('Iter%2d raiz u=(%9.6f,%9.6f)
f(u)=(%9.6f,%9.6f)\n',iter,u1(1),u1(2),fu1(1),fu1(2));
    if iter > maxiter
        fprintf('Numero maximo de iteraciones excedido\n');
        return;
    end
    uo=u1;
    iter=iter+1;
end
```

---

## Apéndice B

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% CEROCLINAS DEL MODELO POLINIZADOR-PLANTA %%
%%          fi: polinizador, g: planta          %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

f1='(2-u) + (1.62*v.*exp(-0.5*v)./(1+1.62*v))';
colormap([1 0 0])
ezplot(f1, [0, 3, 0, 3])
grid on
pause
hold on
g='-2 +(1.8*u.*exp(-0.5*v)./(1+1.62*v))';
ezplot(g, [0, 3, 0, 3])
pause
f2='0.5-u+(1.62*v.*exp(-0.5*v)./(1+1.62*v))';
ezplot(f2, [0, 3, 0, 3])
pause
f3='1.111-u+(1.62*v.*exp(-0.5*v)./(1+1.62*v))';
ezplot(f3, [0, 3, 0, 3])
x=0.5;
y=0;
plot(x, y, 'r')
hold off
```



---

## Apéndice C

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% PLANO DE FASE PARA EL MODELO LINEALIZADO %%
%%      POLINIZADOR-PLANTA K = 0.5, 1.5      %%
%%      PUNTO CRÍTICO: (K,0)                %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

function vectorfield (deqns, xval, yval, t)
if nargin==3;
    t=0;
end
m=length(xval);
n=length(yval);
x1=zeros (n, m);
y1=zeros (n, m);
for a=1:m
    for b=1: n
        pts=feval (deqns, t, [xval(a); yval(b)]);
        x1(b, a) = pts (1);
        y1(b, a) = pts (2);
    end
    arrow=sqrt(x1.^2+y1.^2);
    quiver (xval, yval, x1./arrow, y1./arrow,.5,'r');
    axis tight;
end
end
```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear
%Ingrese valores para K:
sys=inline ('[-K* x(1) + 1.62*K*x(2); (1.8*K-2)*x(2)]','t','x');
vectorfield (sys, -2:1:10,-2:1:10) %Rango del campo y del vector
hold on
for x0=-2:1:10 %rango de valores para el valor inicial de x
    for y0=-2:1:10 %rango de valores para el valor inicial de y
        [ts, xs]=ode45(sys, [-2,10], [x0 y0]);
        plot (xs (: ,1), xs (: ,2)) %dimension de la matriz del sistema X
    end
end
for x0=-2:1:10 %rango de valores para el valor inicial de X
    for y0=-2:1:10 %rango de valores para el valor inicial de Y
        [ts, xs]=ode45(sys, [-2,10], [x0 y0]);
        plot (xs (: ,1), xs (: ,2)) %dimension de la matriz del sistema X
    end
end
hold off
axis ([-2 10 -2 10]) %tamaño de visualizacion para coordenadas
fsize=10;
set (gca, 'xtick', [-2:1:10], 'FontSize', fsize) %numero para las
%coordenadas en la rejilla
set (gca, 'ytick', [-2:1:10], 'FontSize', fsize) %numero para las
%coordenadas en la rejilla
xlabel('u(t)','FontSize', fsize)
ylabel('v(t)','FontSize', fsize)
hold off

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%% PLANO DE FASE PARA EL MODELO LINEALIZADO %%
%% POLINIZADOR-PLANTA PARA K = 2 %%
%% PUNTO DE ESTABILIDAD: (x(1), x(2))=(0,0) %%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

clear
sys=inline('[2*x(1); -2*x(2)]','t','x');
vectorfield(sys, -4:1:4,-4:1:4)%Rango del campo y del vector
hold on
for x0=-4:1:4 %rango de valores para el valor inicial de x
    for y0=-4:1:4 %rango de valores para el valor inicial de y
        [ts, xs]=ode45(sys, [-4,4], [x0 y0]);
        plot (xs(:, 1),xs(:, 2))%dimension de la matriz del sistema X
    end
end
for x0=-2:1:10 %rango de valores para el valor inicial de X
    for y0=-4:1:4 %rango de valores para el valor inicial de Y
        [ts, xs]=ode45(sys, [-4,4], [x0 y0]);
        plot(xs(:, 1),xs(:,2))%dimension de la matriz del sistema X
    end
end
hold off
axis([-4 4 -4 4]) %tamaño de visualizacion por las coordenadas
fsize=10;
set(gca, 'xtick', [-4:1:4], 'FontSize',fsize) %numero para las
%coordenadas en la rejilla
set(gca, 'ytick', [-4:1:4], 'FontSize',fsize) %numero para las
%coordenadas en la rejilla
xlabel('u(t)', 'FontSize',fsize)
ylabel('v(t)', 'FontSize',fsize)
hold off

```

---

# Bibliografía

- [1] Ablowitz M.; Zeppetella A. **Explicit solutions of Fisher’s equation for a special wave speed.** *Bulletin of Mathematical Biology*, 41(6):835–840 p, 1979.
- [2] Allman E.; Rhodes J. **Mathematical models in biology: an introduction.** *Cambridge University Press*, 2004.
- [3] Barreira L.; Valls C. **Ordinary Differential Equations - Qualitative Theory** *Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society*, vol. 137. 2012.
- [4] Billingsley P. **Convergence of Probability Measures.** *Jhon Wiley & Sons*, 1999.
- [5] Boucher D. **The biology of mutualism.** *Oxford University Press*, 1982.
- [6] Bird R.; Stewart W.; Lightfoot E. **Fenómenos de transporte.** *Editorial Reverté*, 1978.
- [7] Britton N. **Reaction-diffusion equations and their applications to biology.** *Academic Press*, 1986.
- [8] Da Prato G.; Zabczyk J. **Stochastic equations in infinite dimensions.** *Cambridge University Press*, 2014.
- [9] Steinar Engen, Øyvind Bakke, and Aminul Islam. **Demographic and environmental stochasticity-concepts and definitions.** *Biometrics*, 840–846 p, 1998.

- 
- [10] Feller W. **The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations.** *Annals of Mathematics*, 468–519 p, 1952.
- [11] Christiansen F.; Fenchel T. **Theories of population in biological communities**, 1977.
- [12] Gause G.; Smaragdova N.; Witt A. **Further studies of interaction between predators and prey.** *The Journal of Animal Ecology*, 1–18 p, 1936.
- [13] Gray P.; Pratt MWT. **Reduction of nitric oxide in flames and the decomposition flame of methyl nitrite.** *Symposium (International) on Combustion*, vol 6, 183–190 p. Elsevier, 1957.
- [14] Gurney W.; Nisbet R. **Modelling fluctuating populations**, 1982. The Blackburn Press, 2004.
- [15] Kametaka Y. **On the nonlinear diffusion equation of Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov type.** *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*, 401–407 p. Springer, 1975.
- [16] Lotka A. **The growth of mixed populations: two species competing for a common food supply.** *The golden age of theoretical ecology: 1923–1940*, 274–286 p. Springer, 1978.
- [17] Malthus T. **An essay on the principle of population, as it affects the future improvement of society**, volume 2. *Printed for J. Johnson, in St. Paul's Church-Yard*, 125 p, 1798.
- [18] Manning R. **Programs that work. Visitor experience and resource protection: a framework for managing the carrying capacity of National Parks.** *Journal of park and recreation administration*, 19(1): 93–108 p, 2001.
- [19] Jaén Universidad. **Modelos Matemáticos en Biología.** *Texto del Departamento de Matemáticas*, 367 p, 2009.
- [20] Murray J. **Mathematical biology. II Spatial models and biomedical Applications.** *Interdisciplinary Applied Mathematics* . Springer-Verlag New York Incorporated, V. 18, 2001.

- 
- [21] Murray J. **Mathematical biology** [electronic resource]: An introduction. Springer, 2002.
- [22] Newell A.; Whitehead J. **Finite bandwidth, finite amplitude convection.** *Journal of Fluid Mechanics*, 38(02):279–303 p, 1969.
- [23] Oksendal B. **Stochastic differential equations: an introduction with applications.** *Springer Science & Business Media*, 2013.
- [24] Pocheville A. **The ecological niche: history and recent controversies.** *Handbook of evolutionary thinking in the sciences*, 547–586 p. Springer, 2015.
- [25] Rincón L. **Introducción a los procesos estocásticos.** *Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias UNAM*, 2012.
- [26] Soberón J.; Martínez C. **The dynamics of a plant-pollinator interaction.** *J. Theor. Biol.*, 91, 363-378 p., 1981.
- [27] Strauss A. **Partial differential equations**, volume 92. *Wiley New York*, 1992.
- [28] Tornatore E.; Manca L.; Fujita H. **Comportamento asintotico della soluzione del sistema di equazioni stocastiche per due specie in competizione.** *Quaderni scientifici del Dipartimento di Matematica*, 2010.
- [29] Volterra V. **Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi.** C. Ferrari, 1927.